RGSM - 可達灰色結構模型法的提案

永井正武 [1]	蔡清斌 [2]	范德孝 [3]
臺中教育大學	臺中教育大學	臺中教育大學
教育測驗統計研究所	教育測驗統計研究所	教育測驗統計研究所
教授	博士候選人	博士生
nagai@kamakuranet.ne.jp	tsai.chenbin@msa.hinet.net	hieuhagdthsp2@gmail.com
阮逢選 [4]	姜秀傑 [5]	許天維 [6]
臺中教育大學	臺中教育大學	臺中教育大學
教育測驗統計研究所	教育測驗統計研究所	教育測驗統計研究所
博士生	博士生	教授
tuyennguyenphungkigi@yahoo.com.vn	hsiujyegood@yahoo.com.tw	sheu@mail.ntcu.edu.tw

摘要

從傳統的灰結構模型法(Grey Structural Modeling；GSM)的介紹，接著簡述筆者提案的可達灰結構模型法 (Reachable Grey Structural Modeling；RGSM)，本論文的目的是為記述傳統灰結構分析法(GSM)，適用 MSM (Matrix Based Interpretative Structural Modeling)提案另一種新的可達灰結構分析方法：RGSM，應用於教育的安定狀態解析，其將資料分析研究與可視化，不僅在於教育測驗統計之應用上，而且在工學研究上，也很適實用。最後，以一個教育測驗為例。

關鍵詞：灰結構模型法、GSM、可達灰結構模型法、RGSM、MSM、安定狀態解析

Abstract

From the introduction of traditional Grey Structural Modeling (GSM) to the brief proposal of Reachable Grey Structural Modeling (RGSM) by the researchers, the purpose of this paper is to describe the traditional grey structural analysis via Matrix Based Interpretative Structural Modeling (MSM), and propose another new grey structural analysis method: RGSM. It applies to analyze stable state of education, which can analyze and visualize data. It not only applies in educational measurement and statistics but also applies in engineering research usefully in the future. Finally, one educational test is given as example.

Keywords: Grey Structural Modeling, GSM, Reachable Grey Structural Modeling, RGSM, MSM, stability state analysis.

1. 前言

詮釋結構模型法 (Interpretative Structural Modeling；ISM)由 J.N. Warfield 為分析複雜社會經濟系統的有關問題而開發的一種常用的階層式結構模式，透過 ISM 的計算，可計算出不同類型元素之間的關聯構造階層圖，這種關聯構造階層圖是一種階層有向圖(Warfield, 1982)。5W1HISM 是一種語義結構組成的分析方法，由永井正武教授 1989 年所提出，這是結合 5W1H 解析方法，以數學方法找到最大（強）值和最低（弱）值，進行比較並篩選出語彙的方法，成為新產品創新設計發展的語彙特徵(Tsai, Nagai, and Chung, 2002；Tsai, and Chung, 2003；)，此方法仍建立在原有 ISM 結構模式下。但是在 ISM 的運算時，概念間採主觀的判斷，且只接受 1 與 0 的二元資料。為了改善這個限制，Tazaki 與 Amagasa 等人提出了模糊詮釋結構模式(Fuzzy-ISM, FSM)，利用模糊理論之演算法結合 ISM，改進了傳統 ISM 受限於二元資料的限制(Tazaki, and Amagasa, 1979)。灰色結構模型法(Grey Structural Modeling, GSM)則是由 Yamaguchi、Li、Nagai 提出，利用灰色理論之灰關聯分析，透過實際的數據計算概念結構，改良了傳統 ISM 採用主觀判斷的模式(Nagai, Yamaguchi, and Li, 2005)。粗糙集結構模型法(Rough Structural Modeling, RSM)，將決策系統的約簡與核建立有結構性的規則，有別於 FSM 的 與 GSM 的階層化(Nagai, Chen, Tsai, Ching, and Sheu, 2013；Sheu, Chen, Tsai, Tzeng, Deng, and Nagai, 2013；Sheu, Tsai, Tzeng, Chen, Chiang, Liu, and Nagai, 2012)。ISM、5W1HISM、FSM、GSM 和 RSM 這些結構模式所畫出來的概念圖都各有其優點。但是這些模式都只能夠呈現同一系統中因子或概念間的結構圖，對於位在不同系統的結構圖是無法呈現它們的關係和結構，而 MSM 理論(Matrix Based Interpretative Structural Modeling Theory)，嘗試引入可達化矩陣的計算，期望透過可達矩陣的收斂，將不同系統的結構圖，企圖找出位於不同系統中因子之間的關係和結構，以及系統與系統之間的關係和結構，克服此一缺點。

本研究欲提案 RGSM－可達灰色結構模型法，就是基於灰色結構模型法的整體灰關聯度，當其原始結構圖過於複雜，而其原始的簡式結構圖並無具體收斂效果，只是簡化圖形，無實際有效意義，嘗試引入可達化矩陣的計算，期望透過可達矩陣的收斂，利用其理論可將不同系統的結構圖，企圖找出位於不同系統中因子之間的關係和結構，以及系統與系統之間的關係和結構的方法，進一步再取其簡約結構圖，在資訊信息或數據處理有安定結構上的意義，在教育學習上的安定解析也有其應用價值(Sheu, Chen, Tsai, Ching, and Nagai, 2013)。

這篇論文提案 RGSM，是基於 MSM 的理論進行擴張。MSM 理論(永井正武、蔡清斌、陳姿良，2013；Nagai, and Tsai, 2013)已在 ISM，5W1HISM，FSM，RSM 證明其相容性(Tsai, Chen, and Nagai, 2013；Nagai, and Tsai, 2013)。以下將說明 ISM 原理與原始 GSM 原理。

1.1 詮釋結構模型法 (Interpretative Structural Modeling；ISM)

詮釋結構模式(ISM)是由 J.N.Warfield 於 1976 所提出的數理分析方法，是將複雜系統中，不同類型元素之間的關係，轉變為關聯構造階層圖的數理方法(Warfield, 1974, 1976)。運用在分析上，係利用圖解理論(Graphic Theory)中的階層有向圖(Hierarchical Digraph)，來描述不同類型元素之間的關係。如此可使複雜系統中片段、抽象化的不同元素，轉變為具體化、全面化的關聯構造階層圖。因此，在複雜的系統中可以將不同類型元素之間的關係，由片段、抽象化的要素，轉變為具體化、全面化的關聯構造階層圖，可以釐清複雜事態的結構(Tzeng, Tsai, Nguyen, and Nagai, 2013)。

運用 ISM 於行列式中時，必須排列各要素間的關係，以「1 和 0」 的二值表示各要素相關或不相關，將事件中的所有構造要素，顯且易見轉變成關聯構造階層圖，而得到各構造要素的分佈位置。

1.2 灰結構模型法 (Grey Structural Modeling；GSM)

系統的結構分析通常是十分複雜，很難直接對系統資料或信息進行分析，因此常藉助模型來分析系統的結構。模型是傳達事物的一種表示方法，也是理解、分析、開發或改造事物原型的一種常用手法。GSM 根據 Nagai、Yamaguchi 與 Li 提案的 GRA(Grey relational analysis)算出 LGRA 與 GGRA 之灰關聯度以及排序(Grey relational ordinal)，依據灰關聯度數值進行比較，當其中的一方有較大的值時，就被認定為較重要的項目，而成為結構系統排列的準則。GSM 的基本思惟如圖 1 所示，以 Y 軸為 LGRA，以 X 軸為 GGRA 演算出來的二維平面圖(Digraph)。GSM 的算法如下所示：

步驟1：根據永井正武所提案的 GSM 結構分析理論(Yamaguchi, Li, and Nagai, 2005, 2007)進行矩陣排列，是採用分層法中之敏考斯基距離(Minkosky distance)(Yamaguchi, Li, Mizutani, Akabane, Nagai and Kitaoka, 2006, 2007；Nagai, Yamaguchi, et al., 2005； Liang, Lee and Nagai, 2011；Wang, Sheu, Liang, Tzeng and Nagai, 2011)，以Matlab軟體進行運算，計算出灰關聯度及排序，能夠呈現出整體研究結果的排序狀態。

比方，以教育領域常使用的SP表為例時，令 i 為受測者(學生)，j 為試題，定義其原始矩陣，其中 $i, j = 1,2,\cdots,m$，$0 \le \gamma_{ij} \le 1$，接著運用永井灰關聯度排序(Yamaguchi, Li, and Nagai, 2007)，其範圍為 $\gamma \in [0,1]$。

因此局部灰關聯度LGRA(Localized grey relational grade)公式如式(4)，其中，而整體灰關聯度GGRA(Globalized grey relational grade)公式如式(5)，經由上述的局部灰關聯度與整體灰關聯度公式的計算結果，可以得到GSM 結構圖，而能分析研究結果的排序，同時也可以進行集群分析(Cluster analysis)，找到圖形的階層關係。

步驟2：GSM 階層結構的分析處理方式

當 C 是代表一個階層結構時，這個階層則是由一群結構元素所組成，其公式為：

$$C_i = \{\gamma_{0j} \mid e_{ij} \le \theta\}$$

其中，$i, j = 1,2,\cdots,n$ 且 θ 為階層係數，其範圍為 $0 \le \theta \le 1$，所形成的矩陣 E 如以下公式所示。

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{n1} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}$$

對於集合 C_i 與 C_j，定義多層級階層集合為 $Q_{ij} = C_i \cap C_j$，其誤差值為 $e_{ij} = \left| \gamma_{0i} - \gamma_{0j} \right|$，界定其範圍為 $0 \le e_{ij} \le 1$，且 $e_{ii} = 0$。

優先進行排序的集合為 C_i 時，需要滿足下列兩個條件：

條件1 C_i 是所有尚未排序集合中的基數之最小，亦即 $card\{C_i\}: \min_{\forall i} C_i$。

條件2 對於任意尚未排序集合 C_j，$j = 1,2,\cdots,m;$，必須滿足 $C_i \not\subset C_j$。

步驟3：階層結構的劃分方式是根據永井正武的階層理論(Yamaguchi, Li, and Nagai, 2007)，GSM 結構圖的階層劃分，是將數個有相關的元素集群在一起，公式如下：

$$P = \{(x_i, x_j) | \gamma_{ij} \ge \psi, \gamma_{0i} \prec \gamma_{0j}\} \qquad (1)$$

其中，ψ 是一個共同係數，其範圍介於 $0 \le \psi \le 1$，二者之間可以是共同的關係，可表示為 (x_i, x_j)，P 也可以是經由上、下之間的關係所組成。

2. 可達矩陣灰結構模型法

可達矩陣灰結構模型法，是 MSM (Matrix Based Interpretative Structural Model)的一個特例，其利用傳統 GSM 結構模型中的 LGRA 與 GGRA 之灰關聯度以及排序(Grey relational ordinal) 建立在 MSM 系統下的可達矩陣(Sheu, Chen, Tsai, Ching, and Nagai, 2013)，所形成的結構圖，以下敘述 MSM 定理(Tsai, and Nagai., 2013)與筆者提案的 RGSM 定理，以及系統與系統間的結構圖(Nagai, 1989, 2001；Nagai, and Tsai, 2013)。

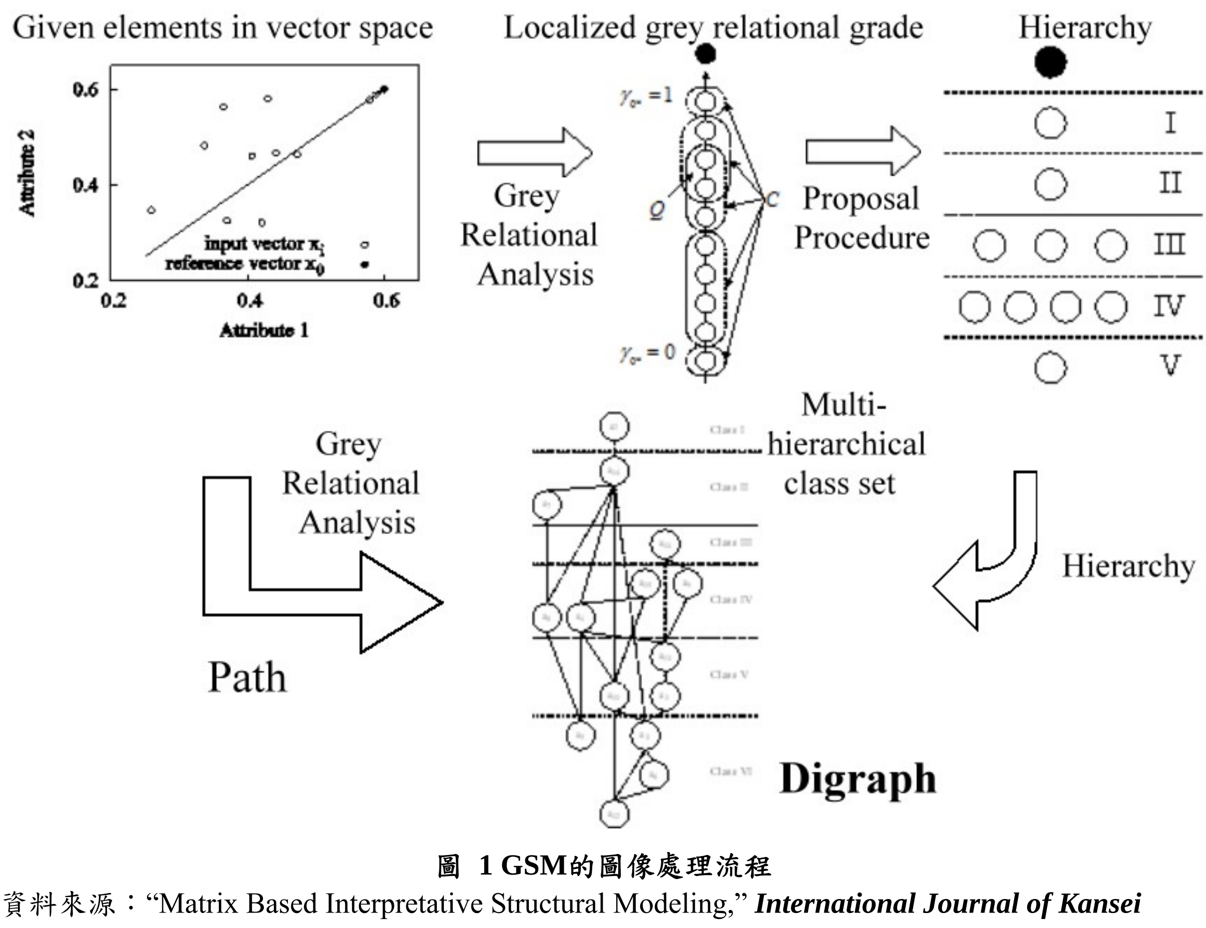

圖 1 GSM的圖像處理流程

資料來源：“Matrix Based Interpretative Structural Modeling,” ***International Journal of Kansei Information***, Vol. 4, No. 3, pp. 173

2.1 MSM (Matrix Based Interpretative Structural Model)定理

MSM 是由蔡清斌與永井正武於 2013 年提出，旨在分析不同系統上，其系統與系統間的結構關係，其利用 MSM 系統下的可達矩陣，所形成的系統間的結構圖(Nagai, and Tsai, 2013)。

定義 1： MSM 定理

假設MSM的系統結構如下：

$$W = MSM(M, T, f) \quad (2)$$

其中，$M = \bigcup M_k$ 是一個因素集的聯合矩陣。設T為結構矩陣，$T = \bigcup_{r \in M} T_r$。$f$ 是可達函數.

$$f : M \times M \to T,$$
$$M \times M = \{(m_i, m_j) \mid m_i, m_j \in M\},$$
$$f(m_i, m_j) = m_{ij} \in T_r.$$

由於 f 是可達的映射函數，則 f 滿足以下：

1. 自反律：$f(m_i, m_i) = 1 \Leftrightarrow m_i \to m_i \quad for\ \forall i$

2. 反對稱律：
$$f(m_i, m_j) = f(m_j, m_i) = 1$$
$$\Leftrightarrow m_i \to m_j, m_j \to m_i \Rightarrow m_i \leftrightarrow m_j$$
$$\Leftrightarrow m_i = m_j \quad for\ \forall i \neq j$$

3. 傳遞律：
$$\begin{aligned} & f(m_i, m_j) = 1,\ f(m_j, m_k) = 1 \\ & \Rightarrow f(m_i, m_k) = 1 \\ & \Leftrightarrow m_i \to m_j, m_j \to m_k \\ & \Rightarrow m_i \to m_k \quad for\ \forall i \neq j \neq k \end{aligned}$$

2.2 RGSM (Reachable Grey Structural Modeling；可達灰結構模型法)

可達灰結構模型法是將傳統灰結構模型，是計算 LGRA 與 GGRA 之灰關聯度以及排序(Grey relational ordinal)，並透過共同係數 ψ 的調整，再透過 MSM 法的路徑聯結。形成唯一的安定狀態二維平面圖(Digraph)。定義與定理敘述如下：

定義 2：建立原始數列

建立原始數據之參考數列 x_0 和比較數列 x_i，$i = 1,2,\cdots,n$，$k = 1,2,\cdots,l$，如下所示。

$$x_0 = (x_0(1), x_0(2), \cdots, x_0(k), \cdots, x_0(l))$$

$$\begin{aligned} & x_1 = (x_1(1), x_1(2), \cdots, x_1(k), \cdots, x_1(l)) \\ & x_2 = (x_2(1), x_2(2), \cdots, x_2(k), \cdots, x_2(l)) \\ & \quad \vdots \\ & x_i = (x_i(1), x_i(2), \cdots, x_i(k), \cdots, x_i(l)) \\ & \quad \vdots \\ & x_n = (x_n(1), x_n(2), \cdots, x_n(k), \cdots, x_n(l)) \end{aligned} \quad (3)$$

定義 3：局部性灰關聯度 (LGRA)公式

$$\gamma_{oi} = \gamma(x_0, x_i) = \frac{\max_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\rho - \|x_0 - x_i\|_\rho}{\max_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\rho - \min_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\rho} \quad (4)$$

當$1 \le \rho < \infty$時，稱為敏考斯基模式灰色關聯度，$\rho = 2$ 也稱為歐幾里德模式灰色關聯度。

定義 4：整體性灰關聯度 (GGRA)公式

$$\gamma_{ij} = \gamma(x_i, x_j) = 1 - \frac{\|x_i - x_j\|_\zeta}{\max_{\forall i} \max_{\forall j} \|x_i - x_j\|_\zeta} \in R \quad (5)$$

為整體性灰關聯度計算時的敏考斯基模式灰關聯度。

定義 5：從屬灰集合 (grey subordination sets)

$S = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$,其中

$\gamma_{oi} = \dfrac{\max_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\rho - \|x_0 - x_i\|_\rho}{\max_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\rho - \min_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\rho}$，如式(4)定義，$0 \le \gamma_{0i} \le \gamma_{0j} \le 1$，$\rho$：敏考斯基距離維度。

定義 6： W 的鄰接矩陣

設 $A = [m_{ij}]$ 是 W 鄰接矩陣，$i = 1,2,\cdots,n$，$j = 1,2,\cdots,n$. 若 x_i 是第 i 向量，則

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & if\ x_i R x_j, i = j \\ 0, & if\ x_i \overline{R} x_j, i = j \\ 1, & if\ \psi \le x_i R x_j \le 1, i \neq j \\ 0, & if\ \begin{matrix} s_i \overline{R} s_j\ or \\ 0 \le x_i R x_j < \psi \end{matrix}, i \neq j \end{cases} \quad , 0 \le \psi \le 1 \quad (6)$$

定義 7： W 的可達矩陣

若 $A = [m_{ij}]$ 是 W 的可達矩陣，$B = A + I$，且 $B \neq B^2 \neq \cdots \neq B^{n-1} = B^n$，$T = B^n$ (7)

則稱此T 是 W 的可達矩陣。

定義 8： W 的可達函數

若 f 是一函數 $f : A \to T$，其中 $A = [m_{ij}]$

是 W 的鄰接矩陣，且 T 是 W 的可達矩陣。則稱此 f 為 W 的可達矩陣。

定義 9： 整體灰關聯函數

若 f_γ 是一函數 $f_\gamma : S \times S \to R$,

$(S \times S) = \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in S\}$,

$$f_\gamma(x_i, x_j) = \gamma_{ij} = 1 - \frac{\left\| x_i - x_j \right\|_\zeta}{\max\limits_{\forall i} \max\limits_{\forall j} \left\| x_i - x_j \right\|_\zeta} \in R \quad (8)$$

其中 S 向量集合的因子，且 R 是實數集合。則稱此 f 為整體灰關聯函數。

用S (grey subordination sets)取代MSM中的M (union matrix sets of factors)，則RGSM的結構化系統的定理如下：

定理：RGSM的結構化系統

假設RGSM的結構系統如下：

$$W = RGSM\,(S, T, f) \quad (9)$$

其中，(i) 設 S 是灰色的隸屬集。(如定義5)

(ii) 設 T 為灰色關聯矩陣，$T = \bigcup\limits_{r \in S} T_r$.

(iii) f 是映射(可達的函數)，

$f : S \times S \to R$,

其中，$S \times S = \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in S\}$,

$f(x_i, x_j) = \gamma_{ij} \in R$.

(iv) $T = [m_{ij}]$ 是 W 的灰色隸屬矩陣，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ 。

(v) 若 x_i 是第 i 個 S 的向量，則

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & if\ x_i R x_j, i = j \\ 0, & if\ x_i \overline{R} x_j, i = j \qquad , 0 \le \psi \le 1 \\ 1, & if\ \psi \le x_i R x_j \le 1, i \ne j \\ 0, & if\ \begin{matrix} s_i \overline{R} s_j\ or \\ 0 \le x_i R x_j < \psi \end{matrix}, i \ne j \end{cases} \quad (10)$$

(vi) $f_\gamma : S \times S \to R$ 是整體灰關聯函，

$(S \times S) = \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in S\}$,

$$f_\gamma(x_i, x_j) = \gamma_{ij} = 1 - \frac{\left\| x_i - x_j \right\|_\zeta}{\max\limits_{\forall i} \max\limits_{\forall j} \left\| x_i - x_j \right\|_\zeta} \in R 。$$

W 為可達矩陣滿足下列條件：

$$\begin{aligned} T &= T + I \\ T^2 &= T \end{aligned} \quad (11)$$

則 $W = RGSM(S, T, f)$ 被稱為 W 的可達灰色結構系統。

證明：

$W = RGSM(S, T, f)$ (由式(9))

(i) 矩陣運算是利用布爾運算符規則(由式(7))。

$$\begin{aligned} \because\ T &= B^n = (A + I)^n \\ &= A^n + A^{n-1} + \cdots + A^2 + A + I \\ &= A^n + A^{n-1} + \cdots + A^2 + A + I + I \\ &= B^n + I \\ &= T + I \end{aligned}$$

$\therefore\ T = T + I$

(ii) $\because\ T = B^{n-1} = B^n$ (同樣，由式(7))。

$\Rightarrow T^2 = T \times T = B^n \times B^n = B^{2n} = B^n = T$

$\therefore\ T^2 = T$

由 (i) 和 (ii) ，它是完全的證明。

$W = RGSM(S, T, f)$ 是 RGSM 的結構化系統。 ■

3. GSM 與 RGSM 範例

本文提案 RGSM 結構系統與傳統的 GSM 結構系統，將以下列範例展現兩者的差異性。

範例：設 GMS 結構矩陣 G，如下所示：

$$G = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

而經過可達矩陣運算後，其可達矩陣 RG，如下所示：

$$RG = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}。$$

經可視化圖示，圖 2 為 GSM 原結構圖，圖 4 為可達矩陣 RGSM 結構圖，圖 3 採原始 GSM 約簡路徑的簡式結構圖，亦即路徑 Q_1 到 Q_2、Q_2 到 Q_3、Q_1 到 Q_3 的結構圖，會約簡掉路徑 Q_1 到 Q_3 的三角路徑約簡 [15]。圖 5 此採 RGSM 約簡路徑的簡式結構圖，只留下最基本

的結構，比較圖 4 與圖 5，可知被約簡掉的路徑 Q_1 到 Q_3、Q_1 到 Q_4、Q_1 到 Q_5、Q_2 到 Q_4、Q_2 到 Q_5、Q_3 到 Q_5，留下最基本的路徑 Q_1 到 Q_2、Q_2 到 Q_3、Q_3 到 Q_4、Q_4 到 Q_5 的最短距離的路徑結構圖；而圖 2 與圖 3，可知路徑 Q_1 到 Q3 被約簡，而 Q_1 到 Q_5 沒被約簡。

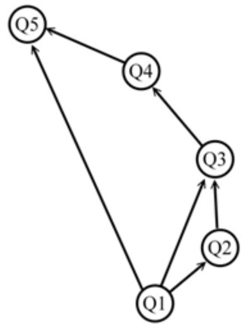

圖 2 GSM-原式

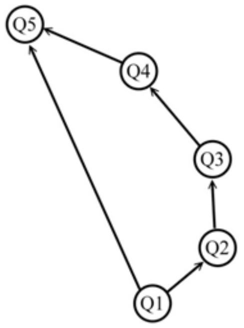

圖 3 GSM-簡式

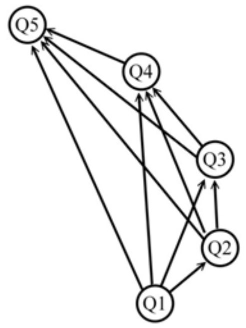

圖 4 RGSM-原式

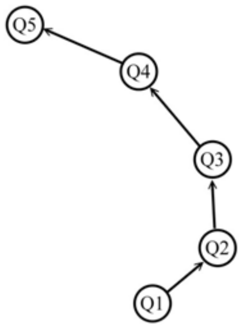

圖 5 RGSM-簡式

資料來源：研究者自行繪製

4. RGSM 演算與實例

此實例，採 8 位受測學生，進行 9 題數學科選擇題考試，其答題反應，答對就填入「1」，答錯就填入「0」，此次測驗學生試題表，如表一所示。

表 1 學生試題表

S\P	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
S1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
S2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
S3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
S4	0	0	1	1	1	0	1	0	0
S5	0	0	0	1	1	1	1	1	0
S6	0	0	1	0	1	0	1	1	1
S7	0	0	1	1	1	1	1	1	1
S8	1	1	1	1	1	1	1	1	1

資料來源：研究者自行整理

將表 1 數據經過 GSM 的計算，並劃出 GSM 結構圖(如圖 6 所示)與 GSM 簡式結構圖(如圖 7 所示)，同時進行可達矩陣運算並劃出 RGSM 的簡式結構圖(如圖 8 所示)。可以發覺原 GSM 結構 S1 答題和 S2、S3、S5 最為相近，S2 和 S3 最相近，S3 和 S4 最相近，S4 和 S5、S6、S7 最相近，S5 和 S7、S8 最相近，S6 和 S7、S8 最相近，而 S7 只和 S8 最相近，在此最相近的意思是指，答對題數最相關也最為接近，在此是利用閾值=0.3 為切值。

在經過傳統 GSM 的簡式結構圖與 RGSM 的簡式結構圖比較，只差別在 S1 和 S5 連線，依表 1 可知道 S1 和 S2 在 P4、P5、P6、P7、P8 與 P9 都答錯，而 S1 和 S5 在 P1、P2、P3、P9 都答錯，在 P6 都答對，所以，S1 和 S2 的相關度比 S1 和 S5 高，而且，依照 RGSM 結構圖，有單一簡約路徑，知道 S1 和 S2 可進一步互相討論試題，S2 和 S3，S3 和 S4，S4 和 S6，S6 和 S5，S5 和 S7，S7 和 S8，兩兩互相討論，一來 RGSM 保留原有 GSM 的相關結構，二來單一路徑可簡化教學上複雜的結構，在此例更能清楚讓兩兩學生，在作答後的檢討題目上，依序互相討論與教導，進而解決對試題上的疑慮。

5. 結論

本研究從傳統 GSM 的介紹，並引入 MSM 理論的可達矩陣算法，詳述筆者提案的 RGSM 的理論與其相關定理，以範例分析傳統 GSM 與可達 GSM 的異同之處。同時，以實例說明 RGSM 在教育測驗上的應用。本論文貢獻如下：

(1) GSM 與 RGSM 皆將資料重要度分層化與關連結構化。如系統因子間的重要度排序與分層，並分析其兩兩間的關聯，且達成結構化分析。

(2) GSM 與 RGSM 皆將資料分析研究與可視化，亦即將數據採無參數統計的方法排序與分類，並將其資料透過關聯結構圖的呈現，使數理分析結果易於了解。

(3) RGSM，應用於教育測驗的安定狀態等解析。例如：教育上分析學生的學習路徑與學習概念間的安定狀態。

RGSM 保留原 GSM 的系統結構，而且利用可達矩陣運算，做最精簡的簡約，以求最安定的狀態解析。此模型結構不僅在於教育測驗統計之應用上，在工學研究上，其有用性仍同樣能期待。

參考文獻

[1] Warfield, J. N., ***Interpretive Structural Modeling (ISM) Group Planning & Problem Solving Methods in Engineering***, New York: Wiley, 1982.

[2] Tsai, P. Y., Nagai, M. and Chung, C. R., "The Comparison and Development Strategy of Web-Based Learning and Traditional Learning by 5W1H Method and Interpretive Structure Model," ***Proc. 6th Global Chinese Conference on Computers in Education/National Education Informatization Forum*** (GCCCE/NEI), Beijing, China, pp. 198-205, 2002.

[3] Tsai, P. Y. and Chung, C. J., "The Study of Applying Interpretive Structural Modeling in Instructional Structural Design," ***Educational Research & Information***, Vol. 11, No. 2, pp. 1-40, 2003.

[4] Tazaki, E. and Amagasa, M. "Structural Modeling in a Class of Systems Using Fuzzy Sets Theory," **Fuzzy Sets and Systems**, Vol. 2, No. 87-103, 1979.

[5] Nagai, M., Yamaguchi, D. S. and Li, G. D., "Grey Structural Modeling," ***Journal of Grey System***, Vol. 8, No. 2, pp. 119-130, 2005.

[6] Nagai, M., Chen, T. L., Tsai, C. P., Ching, H. J. and Sheu, T. W., "Rough Structural Modeling and Its Application," ***Proc. International Conference on Grey System Theory and Kansei Engineering Conference Proceedings, Taichung, Taiwan***, pp. 113-122, 2013.

[7] Sheu, T. W., Chen, T. L., Tsai, C. P., Tzeng, J. W., Deng, C. P. and Nagai, M., "Analysis of Students' Misconception Based on Rough Set Theory," ***Journal of Intelligent Learning Systems and Applications***, Vol. 5, pp. 67-83, 2013.

[8] Sheu, T. W., Tsai, C. P., Tzeng, J. W., Chen, T. L., Chiang, H. J., Liu, W. L. and Nagai, M., "Using Rough Set and Grey Structural Model to Investigate the Structure of the Misconceptions' Domain," ***Journal of Grey System***, Vol. 15, No. 4, pp. 205-220, 2012.

[9] Sheu, T. W., Chen, T. L., Tsai, C. P., Ching, H. J. and Nagai, M., "Establish Learning Structure of Fraction Curriculum for Elementary Stage Based on Reachable Matrix," ***Proc. International Conference on Grey System Theory and Kansei Engineering Conference Proceedings, Taichung, Taiwan***, pp. 129-144, 2013.

[10] 永井正武、蔡清斌、陳姿良，"Matrix Based Interpretative Structural Modeling－從 ISM, FSM, GSM 的介紹以及 RSM 的提案"，***第五屆科技與數學教育國際學術研討會暨數學教學工作坊，臺中市臺中教育大學***，2013。

[11] Nagai, M. and Tsai, C. P., "Matrix Based Interpretative Structural Modeling," ***International Journal of Kansei Information***, Vol. 4, No. 3, pp. 159-174, 2013.

[12] Tsai, C. P., Chen, T. L. and Nagai, M., "Structural Analysis Based on 5W1H and ISM Method," ***International Journal of Kansei Information***, Vol. 4, No. 2, pp. 2013, 55-66.

[13] Warfield, J. N.,"Developing Interconnection Matrices in Structural Modeling," ***IEEE Transactions on System Man and Cybernetics***, Vol. 4, No. 1, pp. 81-87, 1974.

[14] Warfield, J. N., "Implication Structures for System Interconnection Matrices," ***IEEE Transactions on System Man and Cybernetics***, Vol. 6, No. 1, pp. 18-24, 1976.

[15] Tzeng, J. W., Tsai, C. P., Nguyen, P. T. and Nagai, M., "Applying GSM Diagram to Explore Mayer's Multimedia Design Principles in Studying the Importance of OpenCourseWare," ***Proc. 26th IPPR Conference on Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Ilan, Taiwan***, 2013.

[16] Yamaguchi, D. S., Li, G. D. and Nagai, M., "New Grey Relational Analysis for Finding the Invariable Structure and Its Applications," ***Journal of Grey System***, Vol. 8, No. 2, pp. 167-178, 2005.

[17] Yamaguchi, D. S., Li, G. D. and Nagai, M., "Verification of Effectiveness for Grey Relational Analysis Models, ***Journal of Grey System***," Vol. 10, No. 3, pp. 169-181, 2007.

[18] Yamaguchi, D. S., Li, G. D., Mizutani, K., Akabane, T., Nagai, M. and Kitaoka, M., "A Realization Algorithm of Grey Structural Modeling with Matlab," ***Proc. 2006 IEEE International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems, Bangkok, Thailand***, pp. 528-533, 2006.

[19] Yamaguchi, D. S., Li, G. D., Mizutani, K., Akabane, T. H., Nagai, M. and Kitaoka, M. T., "A Realization Algorithm of Grey Structural Modeling," ***Journal of Grey System***, Vol. 10, No. 1, pp. 33-40, 2007.

[20] Liang, J. C., Lee, Y. L. and Nagai, M., "The Innovative Evaluation of Product Design Based on AHP, GRA and GSM," ***Proc. 6th***

International Conference on Planning and Design, pp. 34-43, 2011.

[21] Wang, B. T., Sheu, T. W., Liang, J. C., Tzeng, J. W. and Nagai, M., "The Integrated Methods of GSP and GSM in Concepts Diagnosis for English Grammar," ***International Journal of Kansei Information***, Vol. 2, No. 2, pp. 87-100, 2011.

[22] Nagai, M. ***System analysis method and design methods technique***, Kougaku Kenkyusya, Tokyo, 1989.

[23] Nagai, M. ***Analysis of strategy, systems, design techniques***, Toshiba Computer Reliability Courses, Tokyo, 2001.

附件：

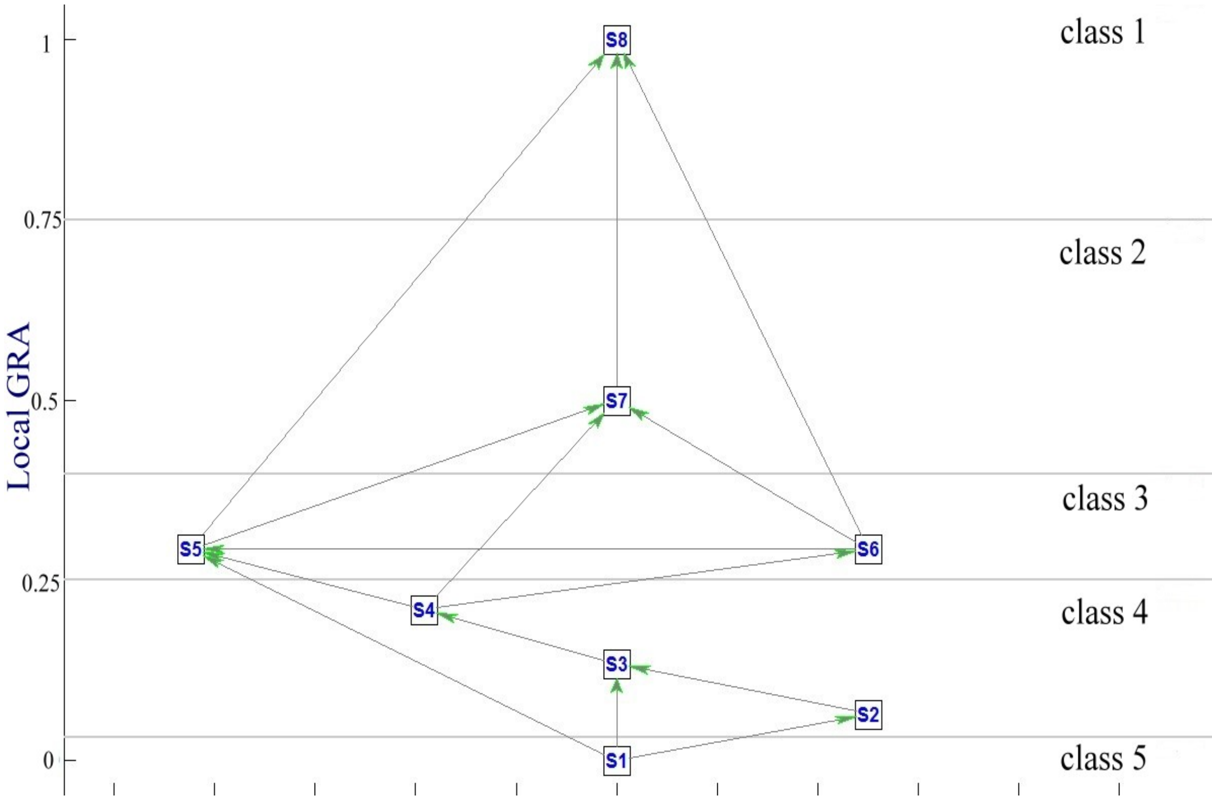

圖 6 GSM 結構圖($\xi=2,\psi=0.3,\theta=0.1$)

資料來源：研究者自行繪製

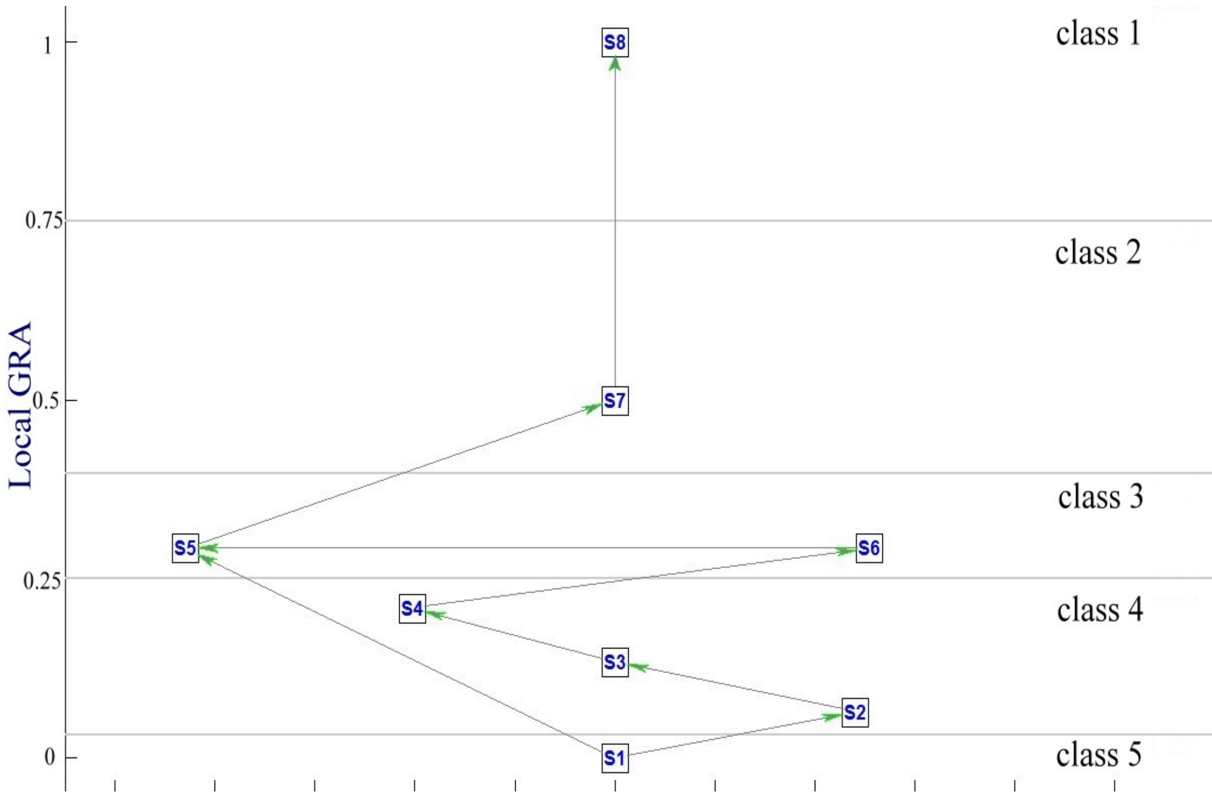

圖 7 GSM <u>簡式</u>結構圖($\xi=2,\psi=0.3,\theta=0.1$同上)

資料來源：研究者自行繪製

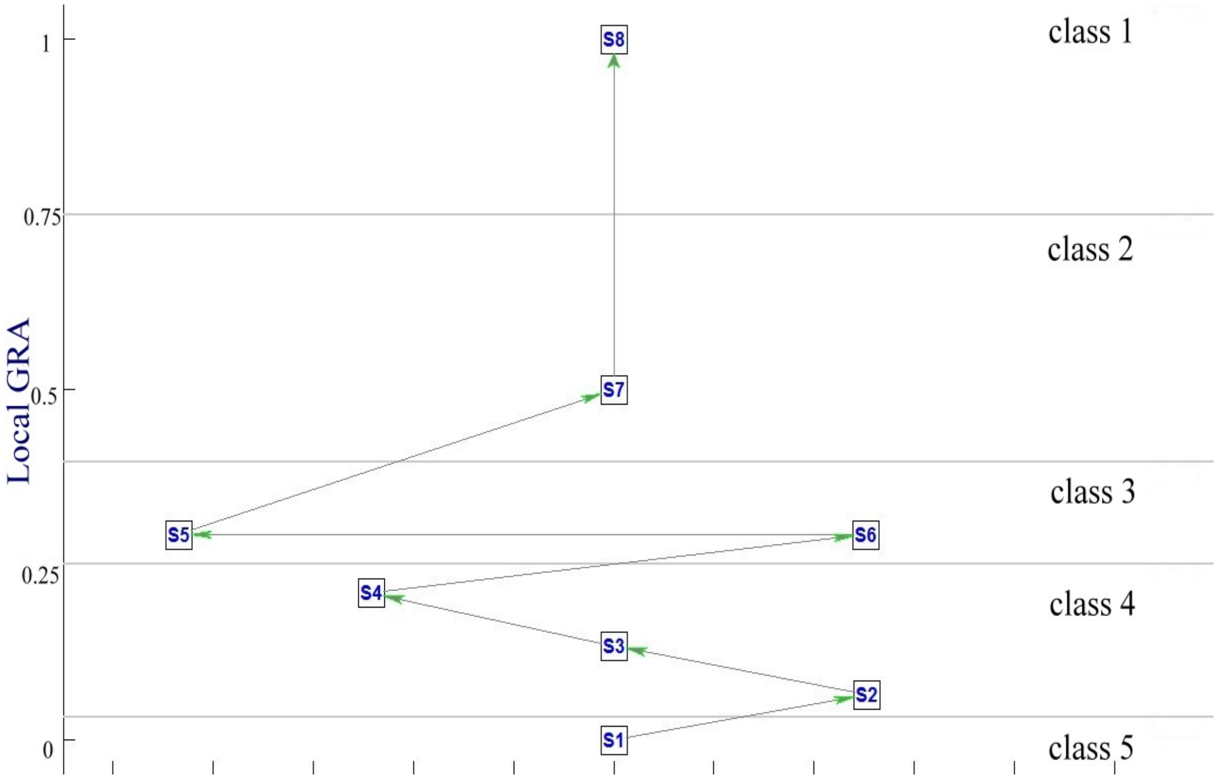

圖 8 <u>RGSM</u> <u>簡式</u>結構圖($\xi = 2, \psi = 0.3, \theta = 0.1$ 同上)

資料來源：研究者自行繪製