

基於 ISM 建立小學階段幾何課程的學習結構

許天維
國立台中教育大學教育
測驗統計研究所教授
e-mail :
sheu@mail.ntcu.edu.tw

童珮玲
國立台中教育大學教育
測驗統計研究所碩士生
e-mail :
tplsophie@gmail.com

陳姿良
國立台中教育大學教育
測驗統計研究所博士生
e-mail :
et104979@yahoo.com.tw

永井正武
國立台中教育大學教育
測驗統計研究所教授
e-mail :
nagai@kamakuranet.ne.jp

摘要

本文之研究目的為建立小學階段幾何課程之學習結構。在本文中，依序整理出小學一至六年級幾何課程的學習概念，以南一版一至六年級數學教科書為例，透過對應 van Hiele 幾何思考模式與數學 2008 九年一貫課程綱要，分析幾何課程的學習順序，並運用詮釋結構模式 (Interpretive Structural Model, ISM) 分別建立一至六年級的 ISM 幾何課程學習結構，以形成當前課程之學習結構。從各年級的結構圖中，不但可具體呈現各年級之教學路徑，更可進一步找出小學階段學習幾何課程的重要概念，提供教師進行教學之參考。

關鍵詞：幾何課程，學習結構，van Hiele 幾何思考模式，九年一貫課程綱要，詮釋結構模式，教學路徑。

Abstract

Purpose of this study was to establish the structure of the primary stage of learning geometry course. In this article, learn the concept of sorting out the order to sixth grade elementary school geometry course to Nani first to sixth grade math textbooks, for example, geometrical thinking and mathematics syllabus 2008 through the corresponding nine-van Hiele, analysis geometry courses learning sequence, and the use of interpretive structural modeling (Interpretive Structural Model, ISM) ISM were established geometric structure of one to six year course of study, in order to study the formation of the current structure of the course. From the structure of each grade, not only can show the specific path all grades of teaching, but also to further identify the important concepts of the primary stage of learning geometry curriculum, providing teachers with reference to teaching.

Keywords: Geometry Course, learning structure, van Hiele geometric thinking, Grade 1-9 Curriculum Guidelines. Interpretive Structural Modeling, Teaching Path.

1. 前言

不論何階段的學生於學校學習數學時，數學教科書永遠都是數學學習基礎概念的重要來源，也更影響了第一線數學教學教師的教學方式中最重要的因素[5]。近年來開放性的教育，使得教材的編撰者，由教師組成小組或各家出版社進行系統性的編撰，而為免於各編撰者對教材的編撰莫衷一是，教育部頒發訂定國內教材的課程綱要，提供學生學習能力指標，使各教科書的編撰有所依據。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域能力指標除訂定出大方向的學生須達成能力外，更細分各年級的分項細目能力指標，本文也針對小學各年級能力指標整理出分年細目總表，以對應本文所進行分析的幾何教材。

近年來，許多學者對教材進行了一些國際性的研究[4-7]，藉由分析同樣階段的教材，以了解各國家之間的教材內容編撰重點及編寫教科書方式的差異，除可了解各國家之間對於教育所著重的要點，以及該國家對於學生學習階段的規畫外，更應以此當作本國學生學習階段能力養成的參考，與作為本國各階段教材編撰檢討的重要依據。

而目前所見國內對於教材與學生學習的相關研究，多以單一年級，進行教材分析[25-26]。今為考量許多教師的困擾在於無法掌握各階段教學與學習關鍵點，使得學生程度的差異隨著年級的增長而差異有擴大之情形，本文不同於以往的教科書內容分析，以數學幾何課程主題，做貫徹性的分析。結構分析的使用和部分課程的初級階段學習的結構是基於可

達矩陣而建立的。特選取國小階段南一版本1-6年級數學課本，使用可達矩陣(Reachable Matrix)，分別建立各年級的關聯性矩陣與各年級之間的關聯性矩陣，並使用詮釋結構模式(ISM)進行學習路徑說明與結構分析。根據這種結構，教師不僅清楚的知道教學路徑，更可依此進行系統化的教學，並掌控住關鍵命題的教學步驟，為學生建構有效的學習歷程，提供給學生們良好的學習成效。

2. 文獻探討

2.1 van Hiele 幾何思考模式

荷蘭數學教育家P.M. van Hiele及Dina Hiele-Geldof夫婦，根據完形心理學的結構論，以及皮亞傑(J.Piaget)的認知理論(Moline,1990; van Hiele,1986)，於1957年發展出幾何思考模式[11]。van Hiele幾何思考之發展模式有五層次：視覺(Visualization)、分析(Analysis)，非形式歸納(Informal Deduction)、形式歸納(Formal Deduction)以及嚴密性(Rigor)。van Hiele 幾何思考層次之特性有次序性(Sequential)、進階性(advancement)、內因性和外因性(intrinsic and extrinsic)、語言性(linguistics)、不相配性(mismatch)等五個特性[9]。國小數學教科書依據 van Hiele 理論進行編輯，其中1-2年級屬於視覺期，課程進行宜多安排感官操作活動，2-3年級屬分析期，可了解圖形的構成要素，4-5年級屬非形式歸納期，已可學習使用定義和公式，5-6年級進入形式歸納期，學生可經由邏輯歸納建立相關定理的關係。

2.2 小學階段現行幾何課程

教育部所頒布的國民中小學九年一貫課程綱要[12]中，明訂數學學習領域的內容為「數與量」、「幾何」、「統計與機率」、「代數」和「連結」五大主題。而前四項主題的能力指標以三碼編排，其中第一碼表示主題，分別以字母N、S、A、D表示「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題；第二碼表示階段，分別以1、2、3、4表示第一、二、三、四階段：第一階段為國小一至二年級，第二階段為國小三至四年級，第三階段為國小五至六年級，；第三碼則是能力指標的流水號，表示該細項下指標的序號。而「幾何」主題的分年細目表也以三碼表示，第一碼數字代表年級，第二碼S代表幾何主題，第三碼為能力指標流水號。以下分別列出各階段「幾何」的能力指標，表1與分年細目表，表2。

表1 國小階段「幾何」能力指標

第一階段-國小一至二年級「幾何」	
S-1-01	能由物體的外觀，辨認、描述與分類簡單幾何形體。
S-1-02	能描繪或仿製簡單幾何形體。
S-1-03	能認識周遭物體中的角、直線和平面。
S-1-04	能認識生活周遭中平行與垂直的現象。
第二階段-國小三至四年「幾何」	
S-2-01	能認識平面圖形的內部、外部及其周界與周長。
S-2-02	能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。
S-2-03	能理解垂直與平行的意義。
S-2-04	能透過平面圖形的組成要素，認識基本平面圖形。
S-2-05	能透過操作，認識簡單平面圖形的性質。
S-2-06	能認識平面圖形全等的意義。
S-2-07	能理解旋轉角的意義。
S-2-08	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。
第三階段為國小五至六年級「幾何」	
S-3-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
S-3-02	能透過操作，認識「三角形三內角和為180度」與「兩邊和大於第三邊」的性質。
S-3-03	能理解平面圖形的線對稱關係。
S-3-04	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
S-3-05	能理解正方體和長方體的體積公式。(N-3-20)
S-3-06	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
S-3-07	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。
S-3-08	能認識面的平行與垂直，線與面的垂直。
S-3-09	能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。
S-3-10	能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。
S-3-11	能計算正方體或長方體的表面積。

2.3 詮釋結構模式

Warfield 在 1976 年提出詮釋結構模式(Interpretive Structural Model, ISM)，這種數理分析方法是將複雜系統中不同類型元素之間的關係，透過 ISM 運算後，轉變為關聯構造階層圖[1-2]。計算步驟如下：

- (1) 因果關係分析表用二元矩陣 A 表示。
- (2) $B = A + I$ ， B 為含有自己的因果關係矩陣。
- (3) 透過 $B \neq B_2 \neq B_3 \neq \dots \neq B_{n-1} = B_n$ (B_n 代表 B 連乘 n 次)，得到可達矩陣 $T = B_n$ 。
- (4) 將事件中的所有構造要素，轉變為關聯構造階層圖，而得到各構造素的分佈位置。

近年來，ISM 應用在教育方面的研究非常多，包含教學內容的結構化分析[3]、製作數學科學學習興趣因素結構圖[5]、利用 ISM 概念結構圖提出概念學習路徑[6]。本研究整理出小學一至六年級幾何課程的學習概念，透過 ISM 的運算得到各年級的 ISM 幾何課程學習結構。

表 2 國小階段「幾何」分年細目表

年級	分年細目
1	1-s-01 能認識直線與曲線。 1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。 1-s-03 能描繪或仿製簡單平面圖形。 1-s-04 能依給定圖示，將簡單形體做平面鋪設與立體堆疊。
2	2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。 2-s-02 能認識生活周遭中平行與垂直的現象。 2-s-03 能使用直尺處理與線段有關的問題。 2-s-04 能認識面積。 2-s-05 認識簡單平面圖形的邊長關係。
3	3-s-01 能認識平面圖形的內部、外部與其周界。 3-s-02 能認識周長，並實測周長。 3-s-03 能使用圓規畫圓，認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。 3-s-04 能認識角，並比較角的大小。 3-s-05 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。 3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。 3-s-07 能由邊長和角的特性來認識正方形和長方形。
4	4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。 4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。 4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。 4-s-04 能認識「度」的角度單位，使用量角器實測角度或畫出指定的角。 4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。 4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。 4-s-08 能利用三角板畫出直角與兩平行線段，並用來描繪平面圖形。 4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。
5	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。 5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。 5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。 5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。 5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。 5-s-06 能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。 5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。
6	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。 6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。 6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。 6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。 6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

3.研究方法

本文選定南一版本 1-6 年級數學科教學內容[13-24]，選取具備 97 新課綱-數學能力指標中具備「幾何」(以字母 S 表示)的所有單元，建立各年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程，進行小學階段幾何課程的學習結構，透過各年級關連矩陣(如圖 1-6)，進行 ISM 運算，建構出各年級的 ISM 課程，如圖 7-12。

表 3 國小階段-南一版本 1-6 年級數學與幾何相關的單元暨能力指標對應表

年級	冊數	單元	分年細目能力指標
一	第一冊	單元二、比長短	1-S-01
	第二冊	單元七、認識形狀	1-S-02, 1-S-03
二	第三冊	單元六、圖形與形體	1-S-03, 1-S-04
	第四冊	單元三、幾公分	2-S-03
三	第五冊	單元七、平面圖形	2-S-01, 2-S-02
		單元九、面的大小與立體	2-S-05
	第六冊	單元四、角、正方形和長方形	2-S-01
四	第七冊	單元九、周界和周長	3-S-04, 3-S-06
		單元十、圓	3-S-07
五	第八冊	單元四、角和面積	3-S-01, 3-S-02
		單元三、角度	3-S-03
六	第九冊	單元四、角和面積	3-S-04, 3-S-05
		單元八、三角形	3-S-06
七	第十冊	單元五、周長和面積	4-S-04, 4-S-05
		單元八、四邊形	4-S-06
八	第十一冊	單元三、多邊形	4-S-07, 4-S-08
		單元五、長方體和正方體	4-S-01, 4-S-02
九	第十二冊	單元七、平行四邊形和三角形的面積	4-S-03, 4-S-06
		單元九、梯形的面積和應用	4-S-07, 4-S-08
十	第十三冊	單元三、線對稱圖形	5-S-01, 5-S-02
		單元六、扇形	5-S-04
十一	第十四冊	單元五、圓周率和圓面積	5-S-06, 5-S-08
		單元六、扇型面積	5-S-05
十二	第十五冊	單元九、柱體和椎體	5-S-05
		單元一、柱體的體積	5-S-05
十三	第十六冊	單元三、縮圖和比例尺	5-S-04
		單元四、縮圖和比例尺	5-S-03
十四	第十七冊	單元五、圓周率和圓面積	6-S-03, 6-S-04
		單元六、扇型面積	6-S-01, 6-S-04
十五	第十八冊	單元九、柱體和椎體	6-S-01, 6-S-05
		單元一、柱體的體積	6-S-01, 6-S-06
十六	第十九冊	單元四、縮圖和比例尺	6-S-01, 6-S-06
		單元四、縮圖和比例尺	6-S-02

4.結論與建議

本研究詳列各年級關鍵命題，建立關連矩陣，並依此以系統性呈現方式建構出各年級的 ISM 幾何課程結構，以形成當前國小數學課程-南一版本之學習結構。除從系統圖上，可找出重要關鍵命題外，各年級進路圖可具體呈現教學路徑，進一步找出小學階段學習幾何課程的重要概念，提供教師進行教學之參考。

本研究並未針對各年級的學習結構結果進行詳細說明，在往後的後續研究中，將另闢文為此研究結果做詳盡的說明與分析。而為使學習結構更系統性、完整性的呈現，未來也將建立各年級間命題的關連矩陣，並進行年級間銜接問題的探討，以提供教師進行幾何課程教學之參考，使教學成果顯著，達成學生有效的學習成效。

圖 7 一年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程

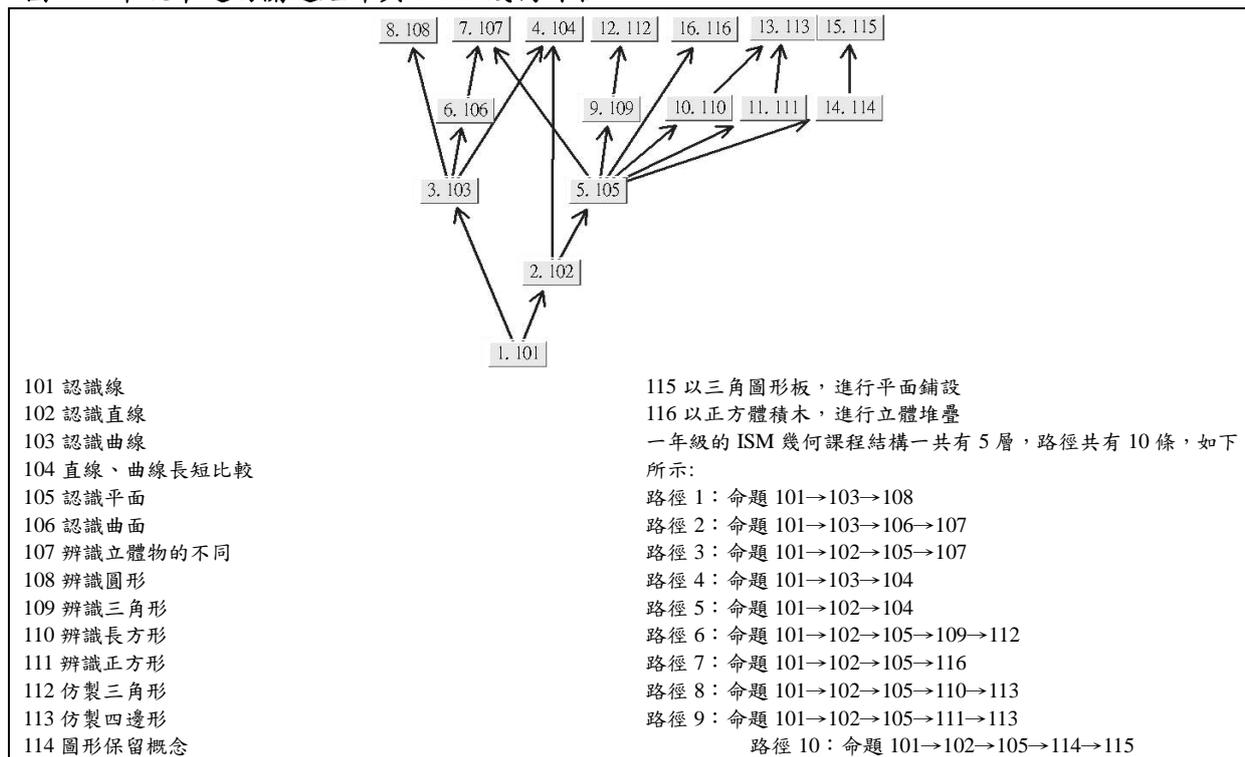


圖 8 二年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程

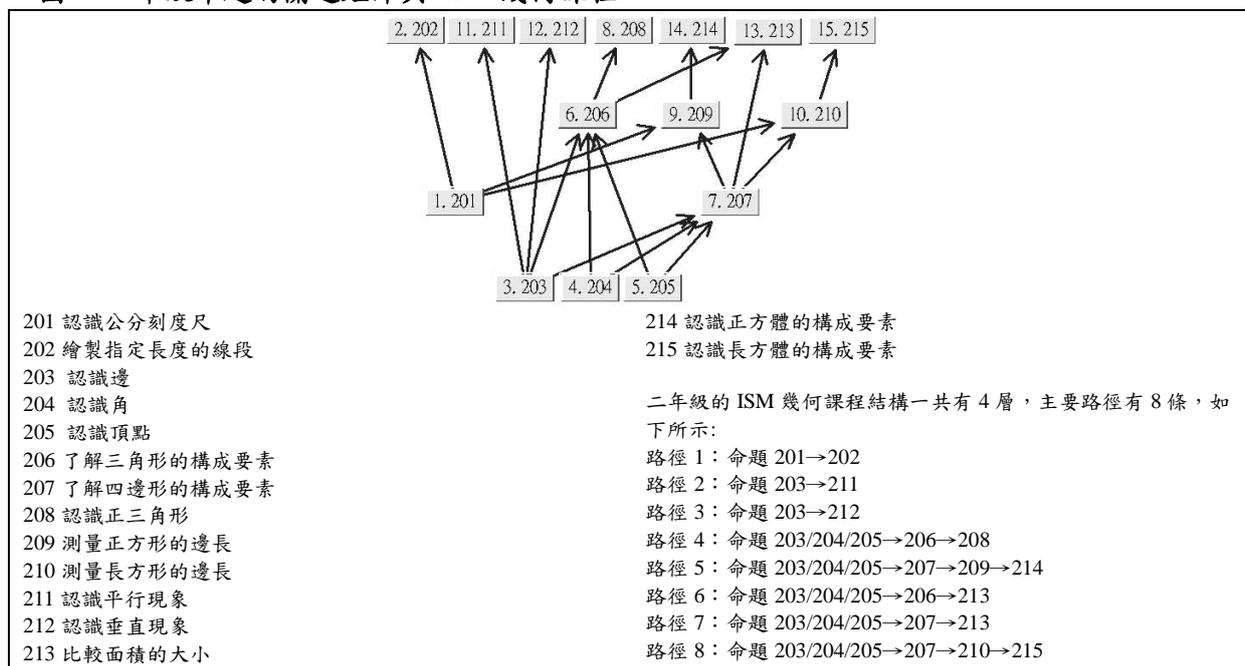


圖 9 三年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程

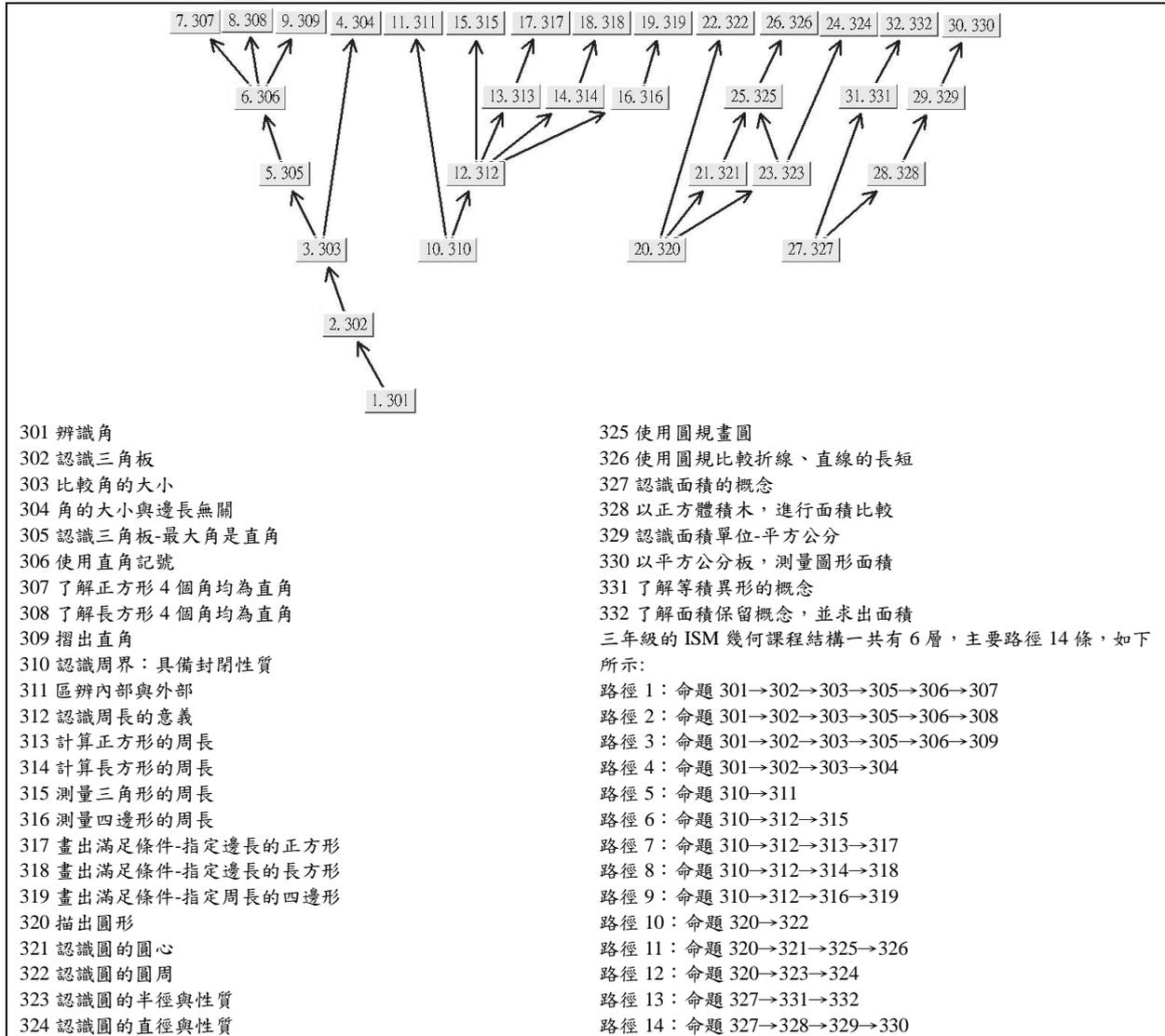


圖 10 四年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程

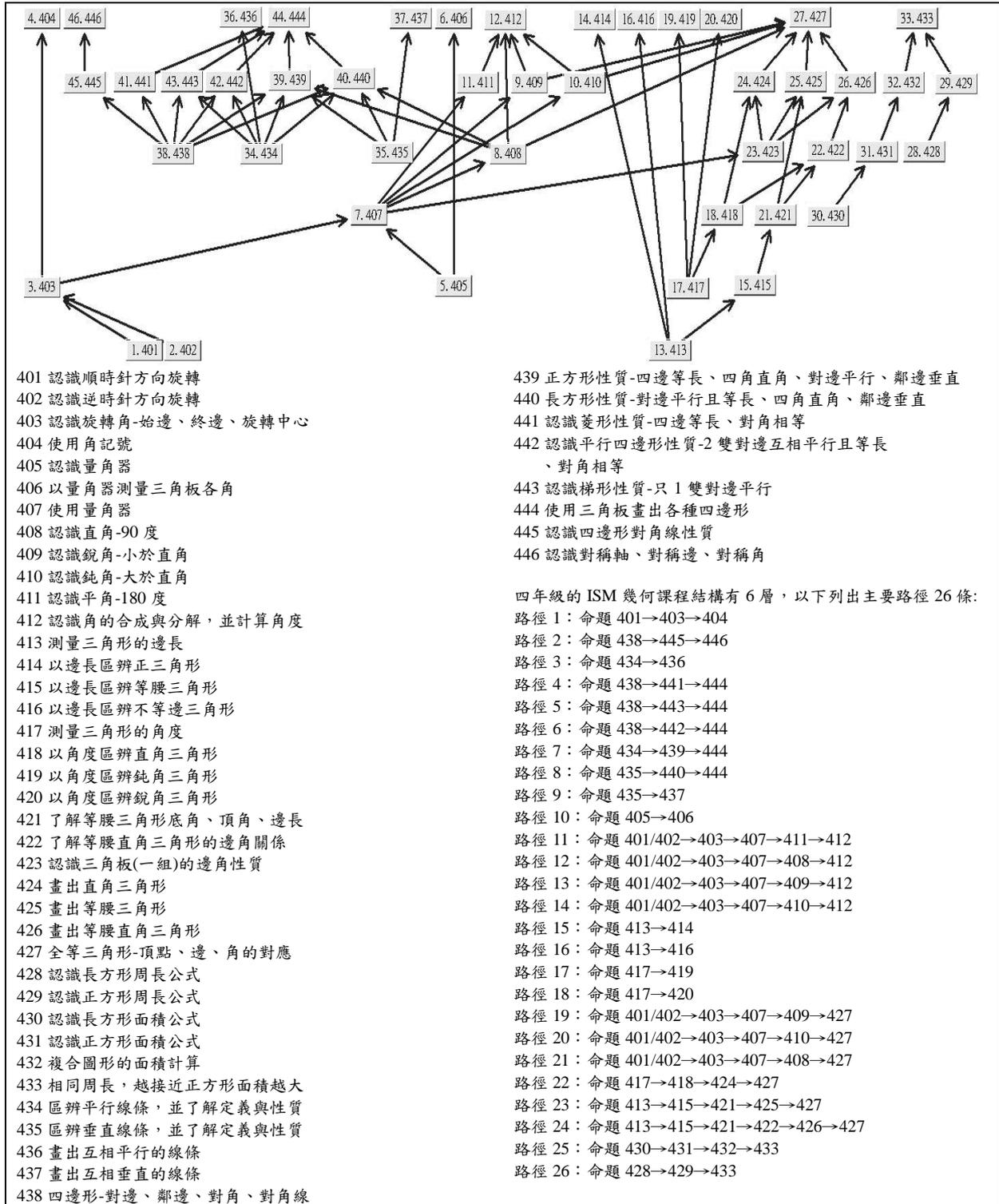


圖 11 五年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程

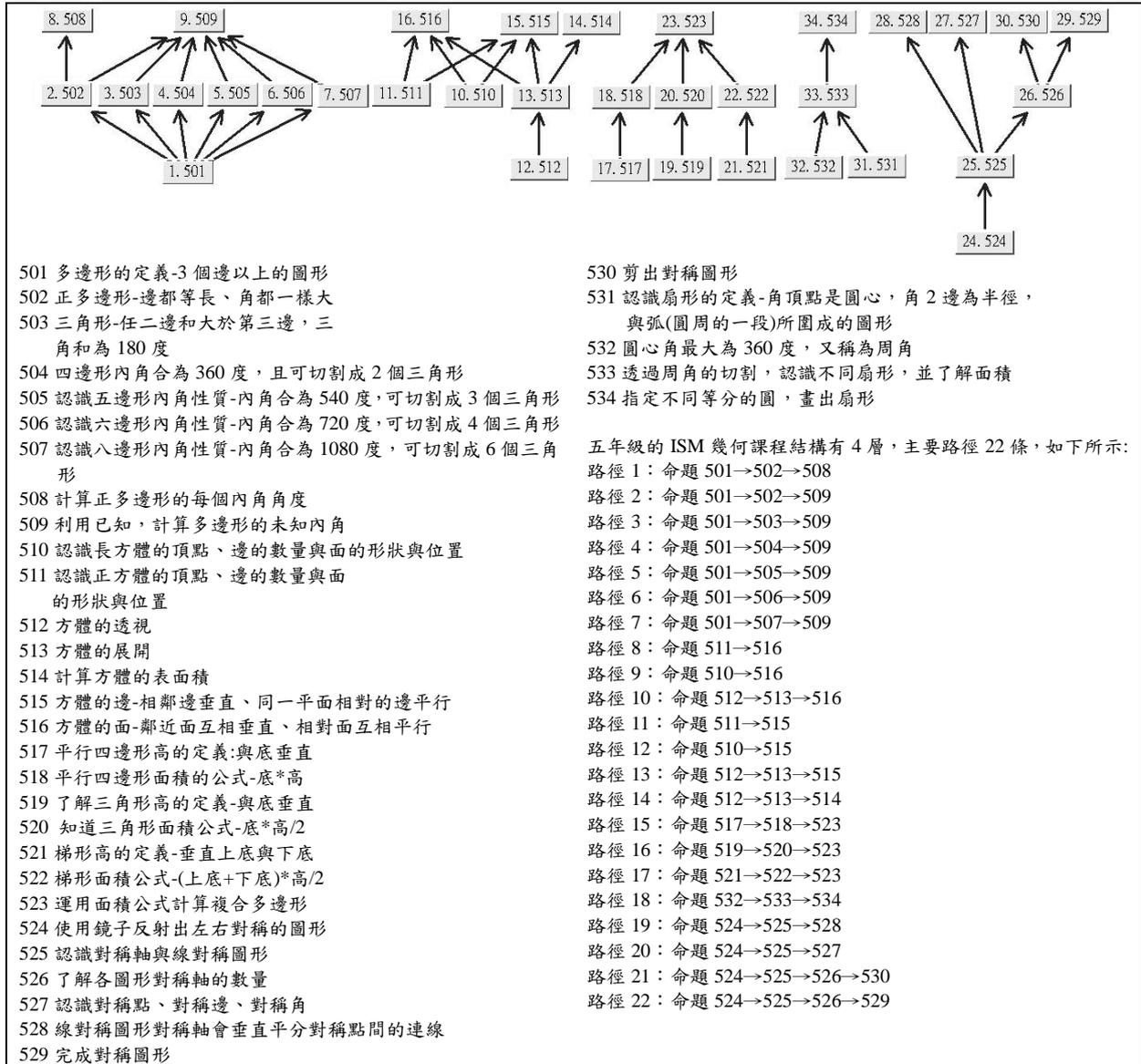


圖 12 六年級命題的關連矩陣與 ISM 幾何課程

