

應用兩種數位訊號轉換法及 MATLAB 模擬分析

柴比雪夫濾波器

蕭開龍

致遠管理學院電機
工程學系

副教授

e-mail:

hsiao@dwu.edu.tw

吳明峰

致遠管理學院電機
工程學系

學生

林紹傑

致遠管理學院電
機工程學系

學生

陳柏璋

致遠管理學院電
機工程學系

學生

摘要

本文的研究，針對柴比雪夫濾波器 (CHEBYSHEV FILTERS)，利用轉換函數的選擇是透過特定的濾波器結構，從一組設計規格到實現轉換函數的轉變步驟進行分析。柴比雪夫濾波器設計具有兩個最佳化準則(1)最大平坦振幅響應 及(2) 較小漣波振幅響應，而可獲得濾波器的優良性能。濾波器的設計有多種不同的方法，本文所探討為類比方法，應用於類比濾波器。針對所指定的頻率響應(含振幅響應、相位響應)，透過有理轉換函數取得近似，另外針對不同階數之濾波器進行分析。本文中並利用 MATLAB 軟體將其結果計算後，並將結果以圖形繪出，使用 MATLAB 軟體是為了計算之便利性，與藉由它的分析結果得以支持結果之正確性。

關鍵字：柴比雪夫濾波器、MATLAB 模擬、信號處理、類比濾波器

Abstract

In this study, for the purpose of detect the signal about Chebyshev analog and digital filter, we use a transformation function to simulation and deal with the problems. It takes the advantage of digital signal estimate processing to show a confirm signal frequency's estimate. The problem use the transformation algorithm by using Laplace transformation first for continuous system, then again by means of (1) pulse invariance transformation methods (2) bilinear transformation methods of two kinds of conversion modes, convert continuity signal to a discrete system

Z-transfer result. This paper takes the advantage of MATLAB software. From the processing of calculation obtains the needed results, and draws its result as diagram. At last, we confirm the two kinds of numerical algorithm calculations for Z-transfer. The calculations results compare with each other are very approximation. MATLAB software is very convenience tool for calculation using and its analysis result can prove the accuracy of convert results.

Keywords : Chebyshev filter, signal processing, Matlab, bilinear transformation methods

1. 前言

柴比雪夫濾波器廣泛的使用在語音處理的實現上。因為在語音分析及語音合成上具有較優異之處理能力，然而其數學模型之分析可藉由一組轉移函數來描述，或者可以用其振幅響應、相位響應來描述。經由相關文獻 Ma et al. [1] 應用於電路訊號分析，Romero et al. [2] 從事於梯狀濾波器之測試，Gordon et al. [3] 進行減幅濾波器設計及分析其響應，Alarcon et al. [4] 則利用三極巴特渥斯濾波器進行心電圖訊號之研究。本文之研究演算法[5]，首先使用拉普拉斯變換，從正規化的古典類比低通濾波器比開始，預先扭曲截止頻率，所以對於其他頻率選擇性的濾波器也適用，如高通、帶通及帶止濾波器。進行有關之類比頻率轉換，設計具徑度截止頻率於不同階數的低通柴比雪夫濾波器，是從正規化柴比雪夫低通濾波器開始，並用截止頻率及濾波器

階數置換為 s 函數式。這是頻率轉換的一個例子。使用同樣方法，可以將正規化低通濾波器，轉換到其他型態的頻率選擇性濾波器。最後，在系統輸出端的重建濾波器產生連續時間訊號，代表原始輸入訊號經過濾波的結果。本文中並利用 MATLAB 軟體將其結果計算分析[6]，並將結果以圖形繪出，以供參考比較。

2. 主要內容

(a) 濾波器的設計

頻率響應的低通濾波器是「理想化的」，它使得位於通帶中的所有頻率成分毫無失真地通過，去除所有位於止帶中的頻率成分，並且從通帶到止帶的過渡帶是很陡峭的。這些性質導致一個不可實作的濾波器。因此，從實用的觀點來看，審慎的方法是容許相對於這些理想條件的「偏差」，來容忍一個可被接受程度的失真，正如同這裡針對連續時間或類比濾波器的情況所做的描述：

●在通帶中，該濾波器的振幅響應應該介於 1 與 $1-\epsilon$ 之間；亦即，

$$\text{當 } 0 \leq |\omega| \leq \omega_p \text{ 時 } 1-\epsilon \leq |H(j\omega)| \leq 1 \quad (1)$$

其中， ω_p 是通帶截止頻率 (passband cutoff frequency) 而 ϵ 是容限參數 (tolerance parameter)。

●在止帶中，該濾波器的振幅響應應該不超過 δ ；亦即，

$$\text{當 } |\omega| \geq \omega_s \text{ 時 } |H(j\omega)| \leq \delta \quad (2)$$

其中， ω_s 是止帶截止頻率 (stopband cutoff frequency) 而 δ 是另一個容限參數。(在此使用的參數 δ 請勿與單位脈衝的符號混淆。)

●過渡帶的頻寬是一個有限值 $\omega_s - \omega_p$ 。

圖 (1) 的容限圖描繪了這些濾波器的規格。類似的規格也使用在離散時間的濾波器，並帶有額外的規定，即該響應相對於 Ω 的週期永遠都是 2π 。

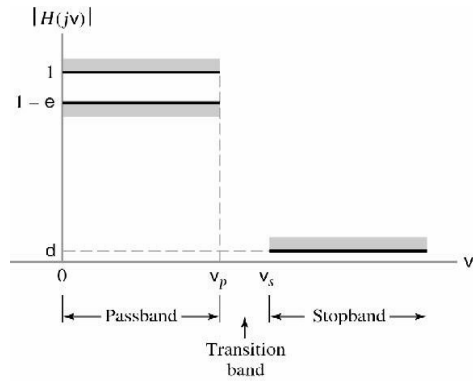


圖 (1) 某個實際低通濾波器的容限圖

在正頻率的情況，顯示出通帶、過渡帶，與止帶。在詳細說明頻率選擇濾波器所需具備的規格之後，我們進一步將濾波器的設計分為兩個不同步驟，以下述次序進行：

1. 針對所指定的頻率響應(即，振幅響應、相位響應，或兩者都是)，透過有理轉換函數取得近似(approximation)，這裡的有理轉換函數代表兼具因果性與穩定性的系統。

2. 透過實體系統對於上述近似轉換函數的實現(realization)。這兩個步驟可以用各種方法來實行，對於特定的一組規格，濾波器設計的問題沒有唯一的解答。然而，關於類比與數位濾波器的設計，我們可以提出三種不同的方法，摘要如下：

(1)類比方法(Analog approach)，應用於類比濾波器。

(2)類比至數位方法(Analog-to-digital approach)，它的動機是以類比濾波器的知識為基礎，設計數位濾波器。

(3)直接數位方法，應用於數位濾波器。本文之研究係就第(1)項，類比方法(Analog approach)，應用於類比濾波器進行分析。

(b) 近似函數

對於求解近似問題而言，轉換函數的選擇是透過特定的濾波器結構，從一組設計規格到實現轉換函數的轉變步驟。因此，這是濾波器設計中最根本的步驟，因為轉換函數的選擇決定濾波器的性能。然而，在一開始我們必須強調近似問題沒有唯一

解。更確切的說，我們有一整組可能的解，每個解都各自擁有特殊的性質。基本上，近似問題就是最佳化問題 (optimization problem)，只能在特定最佳化準則 (criterion of optimality) 的背景中求解。換言之，再著手求解此近似問題之前，必須在明確的意義下指定一套最佳化準則。此外，該準則的選擇唯一地決定了解答。濾波器設計中有兩個常用的最佳化準則如下：

1. 最大平坦振幅響應 (Maximally flat magnitude response)。令 $|H(j\omega)|$ 表示 K 階類比低通濾波器的振幅響應，其中 K 是一個整數。則振幅響應在 $|H(j\omega)|$ 稱為在原點最大平坦 (maximally flat)，若他對於 ω 的多重導數在 $\omega=0$ 消失；亦即，若 $\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} |H(j\omega)| = 0$ 位於 $\omega=0$ 之處，而且 $k=1, 2, \dots, 2k-1$
2. 等幅漣波振幅響應 (Equiripple magnitude response)。令一個類比低通濾波器振幅響應 $|H(j\omega)|$ 的平方值表示成下列形式

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \gamma^2 F^2(\omega)} \quad (3)$$

其中 γ 與通帶的容限參數 ϵ 有關，而 $F(\omega)$ 是 ω 的某個函數。若在整個通帶上， $F^2(\omega)$ 震盪於相等效振幅的最大最小值之間，則稱振幅響應 $|H(j\omega)|$ 為通帶中的等幅漣波 (equiripple in the passband)。這裡我們必須分兩種狀況討論，端視於濾波器的階數 K 是奇數還是偶數。實例 (b)： $K=4$ 而且 $\omega_c=1$

- (1) $F(\omega) = 0$ 如果 $\omega = \pm\omega_{a1}, \pm\omega_{a2}$
- (2) $F^2(\omega) = 1$ 如果 $\omega = 0, \pm\omega_b, \pm 1$
- (3) $\frac{\partial}{\partial \omega} F^2(\omega) = 0$

如果 $\omega = 0, \pm\omega_{a1}, \pm\omega_b, \pm\omega_{a2}$

$$\text{其中 } 0 < \omega_{a1} < \omega_b < \omega_{a2} < 1$$

(c) 柴比雪夫濾波器

圖 1. 的容限圖表需要一個近似函數，當頻率位於通帶範圍 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 時，函數值介於 1 與 $1-\epsilon$ 之間。巴特渥斯函數符合這個要求，但是它的近似能力卻集中在 $\omega=0$ 的附近。對於已知的濾波器階數，

我們可以利用通帶中具有等幅漣波特性的近似函數 (亦即，當 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 時，均勻地在 1 與 $1-\epsilon$ 之間震盪) 得到一個過度帶頻寬經過縮減的濾波器，如圖 2. (a) 與 2. (b) 所示，分別相對於 $K=3, 4$ ，以及通帶中的 0.5dB 的漣波。在這裡所繪製的振幅響應滿足較早之前所描述，分別對於 K 是奇數與 K 是偶數的等幅漣波準則。帶有等幅漣波振幅響應的所有近似函數即是所謂的柴比雪夫函數 (Chebyshev functions)。在這個基礎上所設計的濾波器稱為柴比雪夫濾波器。

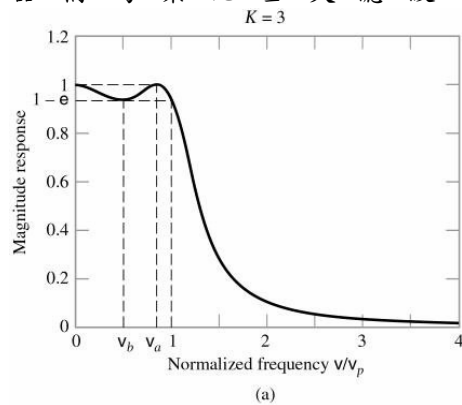


圖 2. (a) 階數 $K=3$ 及帶通漣波 $=0.5\text{dB}$ 的柴比雪夫濾波器振幅響應

柴比雪夫濾波器轉換函數 $H(S)$ 的極點位於 s 平面中的一個橢圓上，而且在某種程度上與所對應巴特臥斯濾波器的極點密

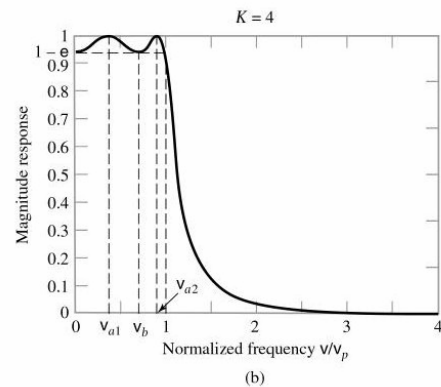


圖 2. (b) 階數 $K=4$ 及帶通漣波 $=0.5\text{dB}$ 的柴比雪夫濾波器振幅響應

切相關。在止帶中，如圖 2. 所示的柴比雪夫函數行為表現是單調的。另外我們可以使用另一種在通帶裡顯示單調響應，但在紙代理顯示等幅漣波響應的柴比雪夫函數，

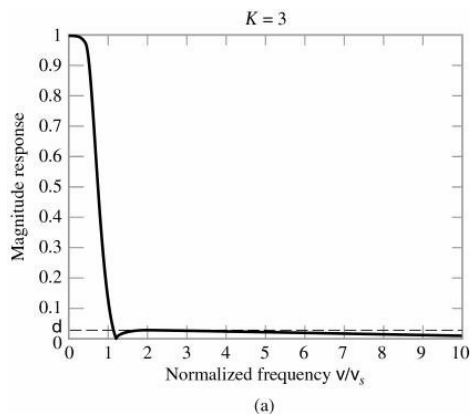


圖 3. (a) 階數 K=3 及止帶漣波=30dB 的柴比雪夫濾波器振幅響應

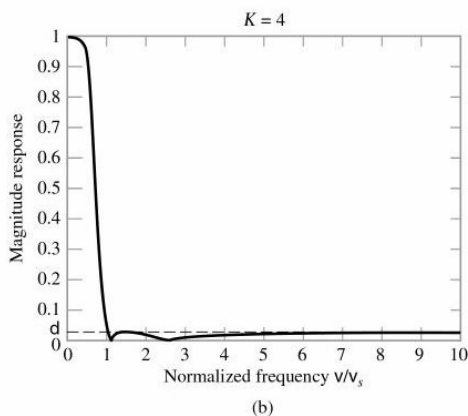


圖 3. (b) 階數 K=4 及止帶漣波=30dB 的柴比雪夫濾波器振幅響應

圖 3. (a)與 3. (b)是分別針對 K=3, 4 以及 30Db 的止帶漣波。在這個基礎上所設計的濾波器稱為逆柴比雪夫濾波器 (inverse Chebyshev filter)。不同於巴特沃斯濾波器，逆柴比雪夫濾波器的轉換函數在 s 平面的 $j\omega$ 軸上有零點。

這些將柴比雪夫與逆柴比雪夫濾波器具體化概念，可以透過通帶與止帶兩者中近似函數的等幅漣波來結合，進一步縮小過度帶帶寬。像這樣的近似函數稱為橢圓函數 (elliptic function)，而使用這種函數得到濾波器稱為橢圓濾波器 (elliptic filter)。對於已定的一組設計規格，過渡帶的寬度是我們所能達到者中之最小，再這個意義下，可以說橢圓濾波器是最佳化的。這允許了濾波器通帶與止帶間最小可能的分離。然而從分析觀點，決定轉換函數 H(S) 對巴特沃斯濾波器而言是最簡單的，而這對橢圓濾波器而言是最具挑戰性的。透過轉換函數 H(S) 再 s-平面中僅有有限個零點這樣的優點，橢圓濾波器能夠到達她的最佳解，該

零點的數量由濾波器的階數 K 為一決定。相對而言，巴特渥斯濾波器或柴比雪夫濾波器的轉換函數 H(S)，其所有的零點位在 $S=\infty$ 的地方。

(d) 類比頻率轉換

從正規化的古典類比低通濾波器 $H_a(s)$ 開始，預先扭曲截止頻率。在這一節中，使用頻率轉換來擴充這個技巧，所以對於其他頻率選擇性的濾波器也適用，如高通、帶通，和帶止濾波器。進行有關之類比頻率轉換，設計具經度截止頻率於 Ω_0 的低通巴特渥斯濾波器，是從正規化巴特渥斯低通濾波器開始，並用 s/Ω_0 置換 s。這是頻率轉換的一個例子。使用同樣方法，可以將正規化低通濾波器，轉換到其他型態的頻率選擇性濾波器，如高通、帶通，和帶止濾波器。為闡明這步驟，一階正規化巴特渥斯低通濾波器的轉移函數為

$$H_{\text{norm}}(s) = \frac{1}{s+1} \quad (4)$$

我們也可以將正規化低通濾波器經轉換成帶通濾波器。記得帶通濾波器具低頻截止 Ω_0 ，和高頻截止 Ω_1 。因帶通濾波器具兩個截止頻率，複數頻率變數 s 必須以 s 的二次多項式取代，將轉移函數的階數乘以兩倍。尤其是如果 s 以 $D(s) = (s^2 + \Omega_0\Omega_1)/[(\Omega_1 - \Omega_0)s]$ 的二次多項式取代，將產生的濾波器為其所需截止頻率的帶通濾波器。如同高通轉換為低通轉換的倒數，帶止轉換是帶通轉換的倒數。這四種基本的頻率轉換於表(2)。

表 (2) 類比頻率轉換表

$H_a(s)$	$D(s)$
截止於 Ω_0 的低通	s/Ω_0
截止於 Ω_0 的高通	Ω_0/s
截止於 Ω_0, Ω_1 的帶通	$\frac{s + \Omega_0\Omega_1}{(\Omega_1 - \Omega_0)s}$
截止於 Ω_0, Ω_1 的帶止	$\frac{(\Omega_1 - \Omega_0)s}{s + \Omega_0\Omega_1}$

使用表(2)轉換，正規化的具截止頻率 $\Omega_c=1$ rad/sec 之低通轉換函數比 $H_{\text{norm}}(s)$ 可被轉換成任一個低通、高通、帶通，或帶止轉移函數。

(e) 雙線性轉換法

這個方法是基於雙線性轉換 (bilinear transform)，該轉換提供 s-平面中的點與

z-平面中的點之間唯一的映射。使用脈衝非變異法設計濾波器適合於設計低共振頻率之低通濾波器與帶通濾波器，但該技巧不適合於高通或帶阻濾波器。這限制可由雙線性轉換來克服。這轉換為從 s 域 z 域的一對一應。雙線性轉換是一致的對應使得 $j\Omega$ 軸只轉換至 z 平面的單位圓一次，因此可避免頻率成分的失真。此外，穩定類比濾波器的轉換產生一個穩定數位濾波器，所有的極點在 s 平面的左半平面對應至 z 域之單位圓內。雙線性轉換藉由數值積分之梯形公式來獲得。令類比濾波器之類比函數為

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \quad (5)$$

類比濾波器之微分方程式可由(5)式來獲得，如下所示。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s+a} \quad (6)$$

$$sY(s) + aY(s) = bX(s) \quad (7)$$

取反向拉普拉斯轉換，

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (8)$$

(8)式是極限 $(nT - T)$ 與 nT 之間的積分

$$\int_{nT-T}^{nT} \frac{dy(t)}{dt} dt + a \int_{nT-T}^{nT} y(t) dt = b \int_{nT-T}^{nT} x(t) dt \quad (9)$$

數值積分梯形公式為

$$\int_{nT-T}^{nT} a(t) dt = \frac{T}{2} [a(nT) + a(nT-T)] \quad (10)$$

將(10)式代入(9)式，可得

$$y(nT) - y(nT-T) + \frac{aT}{2} y(nT) + \frac{aT}{2} y(nT-T) = \frac{bT}{2} x(nT) + \frac{bT}{2} x(nT-T) \quad (11)$$

取 z-轉換，轉位濾波器系統函數為

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a} \quad (12)$$

比較可得

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (13)$$

其中，週期(T)是與從 s 域到 z 域轉換相關的隱含取樣間隔。為了簡化問題，往後我們都令 $T=2$ 。最後得到的濾波器設計與 T 的實際選擇毫不相關的。令 $H_a(s)$ 表示一個類比(連續時間)濾波器的轉換函數。將(13)式的雙線性轉換代入 $H_a(s)$ ，可以得到對應的數位濾波器轉換函數，即

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} \quad (14)$$

3. MATLAB 實例探討

例題 1. 參考表(2)計算柴比雪夫第一型與第二型濾波器的低通、高通、帶通、帶止濾波器的比較圖顯示其頻率與振幅之關係。考慮設計類比高通、帶通，或帶止濾波器的問題。假設所需的。求(a). 柴比雪夫第一型與第二型數位低通濾波器於 $W_p=0.3$, $W_s=0.4$, $R_p=1$, $R_s=20$ (b). 柴比雪夫第一型與第二型高通濾波器於 $W_p=0.4$, $W_s=0.3$, $R_p=1$, $R_s=20$ (c). 柴比雪夫第一型與第二型帶通濾波器於 $W_p=[0.3 \ 0.5]$, $W_s=[0.2 \ 0.55]$, $R_p=1$, $R_s=20$ (d). 柴比雪夫第一型與第二型帶止濾波器於 $W_p=[0.2 \ 0.55]$, $W_s=[0.3 \ 0.5]$, $R_p=1$, $R_s=20$ 的規格條件下之圖形。

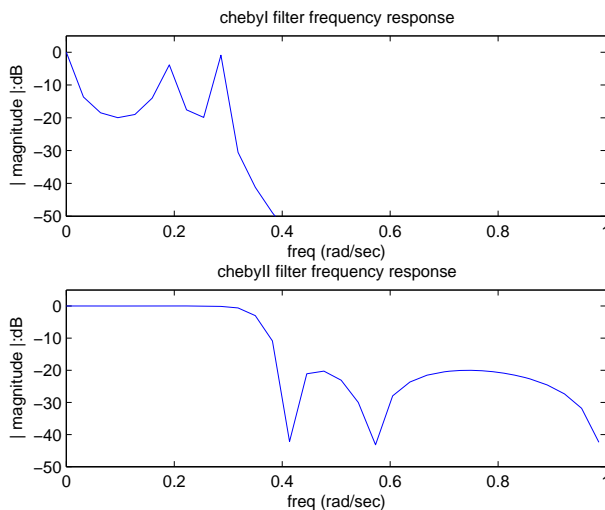


圖 4(a). 柴比雪夫第一型與第二型數位低通濾波器於 $W_p=0.3$, $W_s=0.4$, $R_p=1$, $R_s=20$ 振幅響應比較對照

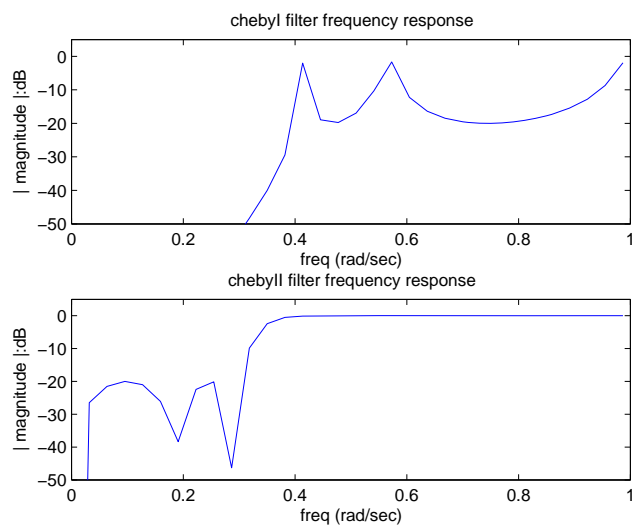


圖 4(b). 柴比雪夫第一型與第二型高通濾波器於 $W_p=0.4$, $W_s=0.3$, $R_p=1$, $R_s=20$ 振幅響應比較對照

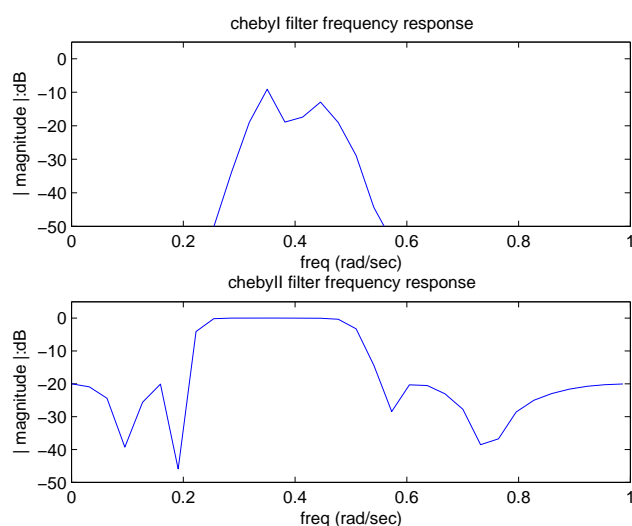


圖 4(c). 柴比雪夫第一型與第二型帶通濾波器於 $W_p=[0.3 \ 0.5]$, $W_s=[0.2 \ 0.55]$, $R_p=1$, $R_s=20$ 振幅響應比較對照

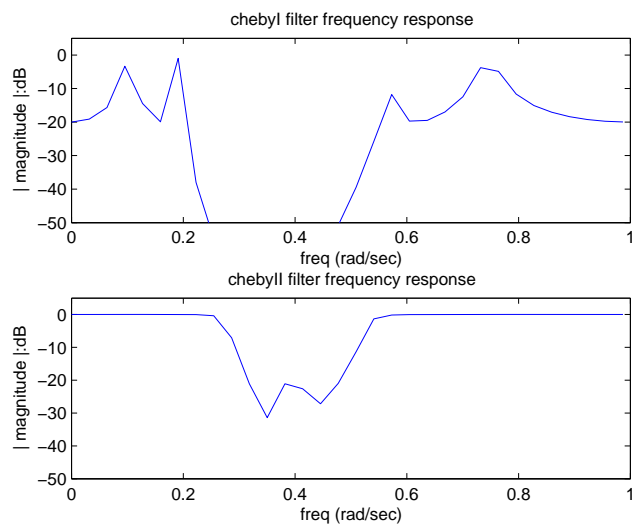


圖 4(d). 柴比雪夫第一型與第二型帶止濾波器於 $W_p=[0.2 \ 0.55]$, $W_s=[0.3 \ 0.5]$, $R_p=1$, $R_s=20$ 振幅響應比較對照

例題 2. 應用脈衝非變異法及雙線性轉換法將類比柴比雪夫第一型低通濾波器轉為高通數位濾波器。濾波器規格為

$$\omega_{pL} = 0.2\pi, \omega_{pH} = 0.2\pi, R_p = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi, A_s = 15\text{dB}$$

ω_{pL} : 低通數位帶通頻率 ω_{pH} : 高通數位帶頻率

R_p : 帶通漣波 ω_s : 數位帶止頻率 A_s : 帶止衰減

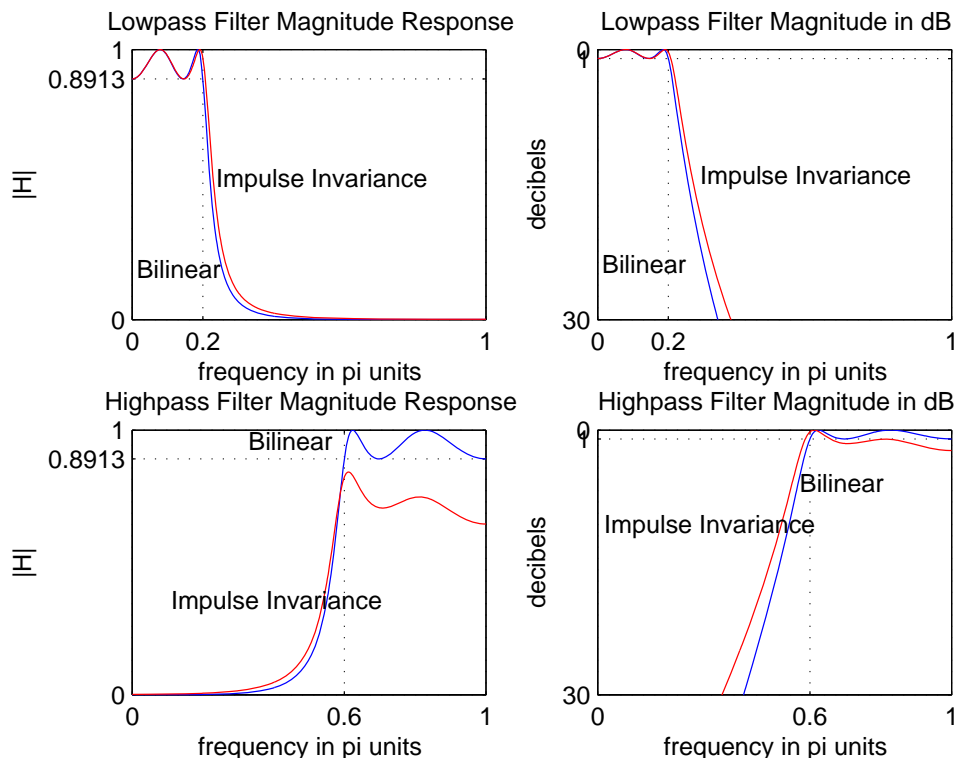


圖 5 利用脈衝非變異法及雙線性轉換法將柴比雪夫低通濾波器轉為高通濾波器的頻率與振幅之關係

本文經由以上理論分析，首先建立一模擬系統藉由拉普拉斯轉換法將其展開為部份分式，並可利用 MATLAB 軟體選定其時間區間進行分析計算並將結果以圖形繪出如圖 5。應用脈衝非變異法及雙線性轉換法將類比柴比雪夫第一型低通濾波器轉為高通數位濾波器，此種比較為本篇論文與其它相關論文之最大不同處，尤其發現圖 5 之 3 高通數位濾波器之振幅大小經由 Bilinear 轉換較 Impulse Invariance 產生較高之振幅其性能較佳，高出約 20%。

4. 結論

- (1) 本文模擬柴比雪夫濾波器系統，藉建立模擬轉換函數，利用 MATLAB 分析計算求出的數位訊號之低通高通、帶通，和帶止濾波器的振幅響應。
- (2) 柴比雪夫第一型與第二型濾波器的比較最大不同點為第一型的通帶處具有漣波而非通帶處則為平坦化狀態。第二型濾波器則呈現相反的狀態。
- (3) 本篇論文主要利用 MATLAB 軟體模擬柴比雪夫第一型與第二型濾波器於相同規格條件下顯示其振幅響應比較對

照，而可清處之觀察其特性以供設計之參考。

- (4) 最後則是進行離散化處理，藉由(a)脈衝不變轉換法(b)雙線性轉換法等兩種轉換方式，可將拉普拉斯方程式轉換為使 Z-轉換的離散系統並可利用 MATLAB 軟體選定其時間區間進行分析計算並將結果以圖形繪出如圖 5，並得到經由 Bilinear 轉換較 Impulse Invariance 產生較高之振幅大小，其性能較佳之重要結果。

5. 參考文獻：

1. Hong-Guang Ma, Xiao-Fei Zhu, Jian-Feng Xu and Ming-Shun Ai, Circuit state analysis using chaotic signal excitation, Journal of the Franklin Institute, In Press, Corrected Proof, Available online 5 July 2007,
2. Eduardo Romero, Gabriela Peretti, Gloria Huertas and Diego Vázquez, Test of switched-capacitor ladder filters using OBT, Microelectronics Journal, Volume 36, Issue 12, December 2005, Pages 1073-1079
3. D. Gordon E. Robertson and James J. Dowling, Design and responses of Butterworth and critically damped digital filters, Journal of Electromyography and Kinesiology, Volume 13, Issue 6, December 2003, Pages 569-573
4. G. Alarcon, C. N. Guy and C. D. Binnie, A simple algorithm for a digital three-pole Butterworth filter of arbitrary cut-off frequency: application to digital electroencephalography, Journal of Neuroscience Methods, Volume 104, Issue 1, 15 December 2000, Pages 35-44
5. 訊號與系統 洪維堯等譯 全華圖書公司
6. MATLAB 7 在工程上的應用 王晉中等譯 高立圖書公司