

應用兩種數位訊號轉換法及 MATLAB 模擬分析 巴特渥斯濾波器

蕭開龍
致遠管理學院數位
資訊學系
副教授
e-mail:
hsiao@dwu.edu.tw

胡芳榮、林俊凱
致遠管理學院數
位資訊學系
學生

李國禎、蔡裕閔
致遠管理學院數
位資訊學系
學生

吳佳威
致遠管理學院數
位資訊學系
學生

摘要

本文的研究，針對巴特渥斯類比與數位濾波器，利用轉換函數的選擇是透過特定的濾波器結構，從一組設計規格到實現轉換函數的轉變步驟進行分析。巴特渥斯濾波器設計具有兩個最佳化準則(1)最大平坦振幅響應及(2)等幅漣波振幅響應，而可獲得濾波器的優良性能。濾波器的設計有多種不同的方法，本文所探討為首先為類比方法，應用於類比濾波器。然後針對所指定的頻率響應(含振幅響應、相位響應)，透過有理轉換函數取得近似，另外針對不同階數之濾波器進行分析。藉由(1)脈衝不變轉換法(2)雙線性轉換法等兩種轉換方式，將連續性訊號轉換為使用 Z-轉換的離散系統。本文中並利用 MATLAB 軟體將其結果計算分析，並將結果以圖形繪出，證實該兩種演算法則所得之 Z-轉換計算結果與正確解十分近似，使用 MATLAB 軟體是為了計算之便利性，與藉由它的分析結果得以支持轉換結果之正確性，並證實雙線性轉換法比脈衝不變轉換法有更佳之轉換效果。

關鍵字：巴特渥斯濾波器、信號處理、Matlab
雙線性轉換法、脈衝不變轉換法

Abstract

In this study, for the purpose of detect the signal about Butterworth analog and digital filter, we use a transformation function to simulation and deal with the problems. It takes the advantage of digital signal estimate processing to show a confirm signal frequency's estimate. The problem use the transformation algorithm by using Laplace transformation first for continuous system, then again by means of (1) pulse invariance transformation methods (2) bilinear transformation methods of two kinds of conversion modes, convert continuity signal to a

discrete system Z-transfer result. This paper takes the advantage of MATLAB software. From the processing of calculation obtains the needed results, and draws its result as diagram. At last, we confirm the two kinds of numerical algorithm calculations for Z-transfer. The calculations results compare with each other are very approximation. MATLAB software is very convenience tool for calculation using and its analysis result can prove the accuracy of convert results, and prove that the bilinear transformation method is better than the impulse invariance method.

Keywords : Butterworth filter, Signal processing, Matlab, Impulse Invariance, Bilinear.

1. 前言

巴特渥斯濾波器廣泛的使用在語音處理的實現上。因為在語音分析及語音合成上具有較優異之處理能力，然而其數學模型之分析可藉由一組轉移函數來描述，或者可以用其振幅響應、相位響應來描述。經由相關文獻 Ma et al. [1] 應用於電路訊號分析，Romero et al. [2] 從事於梯狀濾波器之測試，Gordon et al. [3] 進行減幅濾波器設計及分析其響應，Alarcon et al. [4] 則利用三極巴特渥斯類比濾波器進行心電圖訊號之研究。本文之研究演算法 [5]，首先使用拉普拉斯變換，從正規化的古典類比低通濾波器函數開始，預先扭曲截止頻率，所以對於其他頻率選擇性的濾波器也適用，如高通、帶通及帶止濾波器。進行有關之類比頻率轉換，設計具徑度截止頻率於不同階數的低通巴特渥斯濾波器，是從正規化巴特渥斯低通濾波器開始，並用截止頻率及濾波器階數置換為 s 函數式。這是頻率轉換的一個例子。使用同樣方法，可以將正規化低通濾波器，轉換到其他型態的頻率選擇性濾波器。最後，在系統輸出端的重建濾波器產生連續時間

訊號，代表原始輸入訊號經過濾波的結果。本文中並利用 MATLAB 軟體將其結果計算分析 [6]，並將結果以圖形繪出，以供參考比較。

而經由參考文獻[1-5]並對相關研究作一綜合整理與討論，本文之研究演算法首先使用拉普拉斯變換，其次將其數位化，使其成為數位濾波器並利用計算(computation)來執行連續時間訊號的濾波動作。設計頻率選擇濾波器，用來將連續時間訊號 $x(t)$ 轉換成對應的數列 $x[n]$ 。數位濾波器在一連串取樣點的基礎上處理數列 $x[n]$ 產生新的數列 $y[n]$ ，新的數列隨後透過數位到類比(D/A)轉換器，轉成對應的連續時間訊號。最後，在系統輸出端的重建濾波器產生連續時間訊號 $y[t]$ ，代表原始輸入訊號 $x(t)$ 經過濾波的結果。本文藉由(1)脈衝不變轉換法(2)雙線性轉換法等兩種轉換方式，將連續性訊號轉換為使用 Z-轉換的離散系統。

論文請用 A4 紙依本格式撰寫，至多 20 頁於大會網頁規定日程前將論文完稿電子檔(word 電子檔或 PDF 格式)上傳，若有其他大會詳細內容，請至研討會網址查詢。

2. 主要內容

2-1. 巴特渥斯濾波器(BUTTERWORTH FILTERS)

K 階巴特渥斯函數(Butterworth function of order K)定義如

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2k}}, K = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

而依此設計的濾波器稱為 K 階巴特渥斯濾波器(Butterworth function of order K)。(1)式的近似函數符合了 $|H(j\omega)|$ 必須為 ω 的偶函數的要求。參數 ω_c 是濾波器的截止頻率(cutoff frequency)。通帶與止帶個別的頻率，

$$\omega_p = \omega_c \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{1/2K} \quad (2)$$

而且

$$\omega_s = \omega_c \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1/2K} \quad (3)$$

針對四個不同的階數 K，利用公式(3)的近似函數所得的平方振幅響應 $|H(j\omega)|^2$ ，作為正規化頻率 ω/ω_c 的函數。所有這些取限於 $\omega = \omega_c$ 處通過半功率點。貫穿整個通帶與止帶的巴特渥

斯函數是單調的。尤其，在 $\omega=0$ 的附近，我們可以將 $H(j\omega)$ 的振幅展開為冪級數：

$$|H(j\omega)| = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2K} + \frac{3}{8} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{4K} - \frac{5}{16} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{6K} \quad (4)$$

這個方程式表示 $|H(j\omega)|$ 對 ω 的前 $2K-1$ 個導數再原點上為零。因此巴特渥斯函數在 $\omega=0$ 時確實是最大平坦的(maximally flat)。為了設計類比濾波器，我們需要知道轉換函數 $H(s)$ ，這是個複變數 s 的函數。已知巴特渥斯函數 $|H(j\omega)|^2$ ，我們要如何找到相對應的轉換函數 $H(s)$ 呢？為了處理這個問題，令 $j\omega = s$ 並且確認

$$H(s)H(-s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 \quad (5)$$

因此，設定 $\omega = s/j$ ，我們可將(8.30)改寫成等價的形式

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2K}} \quad (6)$$

分母多項式的根位於 s 平面中的下列各點：

$$s = j\omega_c (-1)^{1/(2K)} = \omega_c e^{j\pi(2k+1)/(2K)} \quad (7)$$

，當 $k=0, 1, \dots, 2K-1$ 時。

亦即，當 $K=3$ 與 $K=4$ 時， $H(s)H(-s)$ 的極點在半徑 ω_c 的圓上形成對稱。特別注意，對於任何 K 直，沒有任何極點落於 s -平面的虛軸上。這些 $2K$ 個極點中有哪些屬於 $H(s)$ ？對於兼具穩定性與因果性的濾波器，其轉換函數 $H(s)$ 的極點必定會位於 s 平面的左半面。因此， $H(s)H(-s)$ 的那些位於左半 s 平面中的 K 個極點屬於 $H(s)$ ，而剩下位於右半面的極點屬於 $H(-s)$ 。所以，當 $H(s)$ 穩定時， $H(-s)$ 不穩定。

2-2. 脈衝非變異法

以脈衝非變異法設計濾波器，此技巧中，數位濾波器之期望脈衝響應由一致的取樣等效類比濾波器之脈衝響應所獲得。即

$$h(n) = h_a(nT) \quad (8)$$

其中 T 為取樣區間。轉換技巧可以由類比訊號系統函數之簡單的個別極點情況來說明，如下所示，

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - p_i} \quad (9)$$

由(9)式之系統之脈衝響應可藉由取其反向拉普拉斯轉換來獲得，形成下列形式

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^M A_i e^{p_i t} u_a(t) \quad (10)$$

其中 $u_a(t)$ 為連續時間的單位步階函數。等效數位濾波器之脈衝響應 $h(n)$ 由固定取樣 $h_a(t)$ 來獲得，套用(8)式

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^M A_i e^{p_i nT} u_a(nT) \quad (11)$$

(11)式之數位系統的系統響應，可由取 z -轉換來獲得，即

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (12)$$

利用(11)式

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^M A_i e^{p_i nT} u_a(nT) \right] z^{-n} \quad (13)$$

將總和的順序對調，

$$H(z) = \sum_{i=1}^M \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_i e^{p_i nT} u_a(nT) \right] z^{-n} \quad (14)$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \quad (15)$$

此時，比較(9)與(15)，脈衝非變異轉換之對應公式可得

$$\frac{1}{s - p_i} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \quad (16)$$

經由本方法代入(9)式，令 $T=1$ 可得到下式結果

$$H(z) = \frac{-1}{1 - e^{-2} + z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-1} + z^{-1}} \quad (17)$$

2-3. 雙線性轉換法

這個方法是基於雙線性轉換 (bilinear transform)，該轉換提供 s -平面中的點與 z -平面中的點之間唯一的映射。使用脈衝非變異法設計濾波器適合於設計低共振頻率之低通濾波器與帶通濾波器，但該技巧不適合於高通或帶阻濾波器。這限制可由雙線性轉換來克服。這轉換為從 s 域 z 域的一對一應。雙線性轉換是保角的對應使得 $j\Omega$ 軸只轉換至 z 平面的單位圓一次，因此可避免頻率成分的失真。此外，穩定類比濾波器的轉換產生一個穩定數位濾波器，所有的極點在 s 平面的左半平面對應至 z 域之單位圓內。雙線性轉換藉由數值積分之梯形公式來獲得。令類比濾波器之類比函數為

$$H(s) = \frac{b}{s + a} \quad (18)$$

類比濾波器之微分方程式可由(18)式來獲得，如下所示。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s + a} \quad (19)$$

$$sY(s) + aY(s) = bX(s) \quad (20)$$

取反向拉普拉斯轉換，

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (21)$$

對(21)式極限 $(nT - T)$ 與 nT 之間的積分

$$\int_{nT-T}^{nT} \frac{dy(t)}{dt} dt + a \int_{nT-T}^{nT} y(t) dt = b \int_{nT-T}^{nT} x(t) dt \quad (22)$$

數值積分梯形公式為

$$\int_{nT-T}^{nT} a(t) dt = \frac{T}{2} [a(nT) + a(nT - T)] \quad (23)$$

將(23)式代入(22)式，可得

$$y(nT) - y(nT - T) + \frac{aT}{2} y(nT) + \frac{aT}{2} y(nT - T) =$$

$$\frac{bT}{2} x(nT) + \frac{bT}{2} x(nT - T) \quad (24)$$

取 z -轉換，數位濾波器系統函數為

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + a} \quad (25)$$

比較可得

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) = \frac{2}{T} \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right) \quad (26)$$

其中，週期(T)是與從 s 域到 z 域轉換相關的隱含取樣間隔。為了簡化問題，往後我們都令 $T = 2$ 。最後得到的濾波器設計與 T 的實際選擇毫不相關的。令 $H_a(s)$ 表示一個類比(連續時間)濾波器的轉換函數。將(26)式的雙線性轉換代入 $H_a(s)$ ，可以得到對應的數位濾波器轉換函數，即

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{(z-1)}{(z+1)}} \quad (27)$$

經由(1)式完整之拉普拉斯轉換可得下式

$$y(s) = \frac{s}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2} \quad (28)$$

經由本方法代入(1)式，令 $T=1$ 可得到下式結果

$$H(z) = \frac{0.0333 + 0.0667z^{-1} - 0.0667z^{-3} - 0.0333z^{-4}}{1.0000 - 1.5333z^{-1} - 1.4000z^{-2} - 0.3333z^{-3}} \quad (29)$$

2-4. 類比頻率轉換

從正規化的古典類比低通濾波器函數 $H_a(s)$ 開始，預先扭曲截止頻率。在這一節中，使用頻率轉換來擴充這個技巧，所以對於其他頻率選擇性的濾波器也適用，如高通、帶通，和帶止濾波器。進行有關之類比頻率轉換，設計具程度截止頻率於 Ω_0 的低通巴特渥斯濾波器，是從正規化巴特渥斯低通濾波器開始，並用 s/Ω_0 置換 s 。這是頻率轉換的一個例子。使用同樣方法，可以將正規化低通濾波器，轉換到其他型態的頻率選擇性濾波器，如高通、帶通，和帶止濾波器。為闡明這步驟，一階正規化巴特渥斯低通濾波器的轉移函數為

$$H_{\text{norm}}(s) = \frac{1}{s+1} \quad (30)$$

我們也可以將正規化低通濾波器經轉換成帶通濾波器。記得帶通濾波器具低頻截止 Ω_0 ，和高頻截止 Ω_1 。因帶通濾波器具兩個截止頻率，複數頻率變數 s 必須以 s 的二次多項式取代，將轉移函數的階數乘以兩倍。尤其是如果 s 以 $D(s) = (s^2 + \Omega_0\Omega_1)/[(\Omega_1 - \Omega_0)s]$ 的二次多項式取代，將產生的濾波器為其所需截止頻率的帶通濾波器。如同高通轉換為低通轉換的導數，帶止轉換是帶通轉換的導數。這四種基本的頻率轉換於表(2)。

3. MATLAB 實例探討

例題 1. 參考表(2)計算三階數巴特渥斯 (Butterworth) 低通濾波器的低通、高通、帶通、帶止濾波器的波德圖顯示其頻率與振幅及相位之關係。考慮設計類比高通、帶通，或帶止濾波器的問題。假設所需的截止頻率為 $F_0=4\text{Hz}$ 及 $F_1=6\text{Hz}$ 。求其轉換後之濾波器之類比頻率響應。

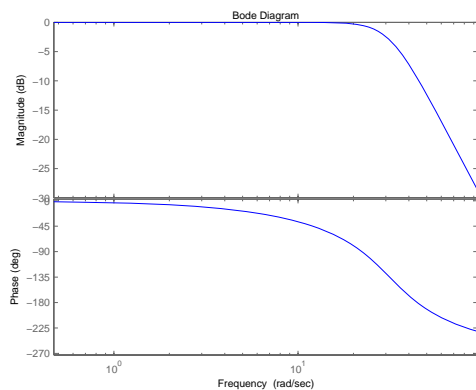


圖 1. 3 階數巴特渥斯低通濾波器的類比頻率與振幅及相位之關係

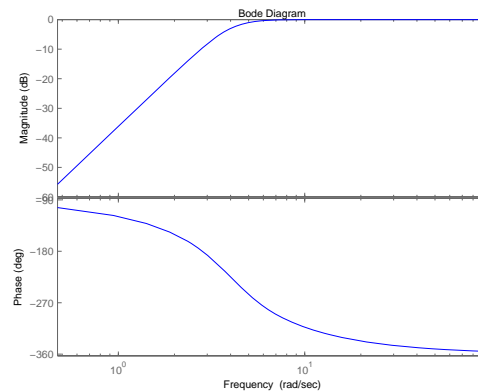


圖 2. 3 階數巴特渥斯高通濾波器的類比頻率與振幅及相位之關係

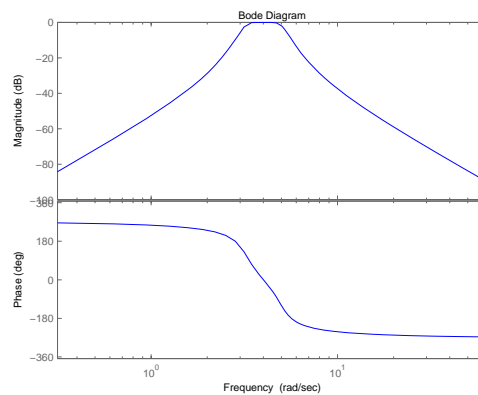


圖 3. 3 階數巴特渥斯帶通濾波器的類比頻率與振幅及相位之關係

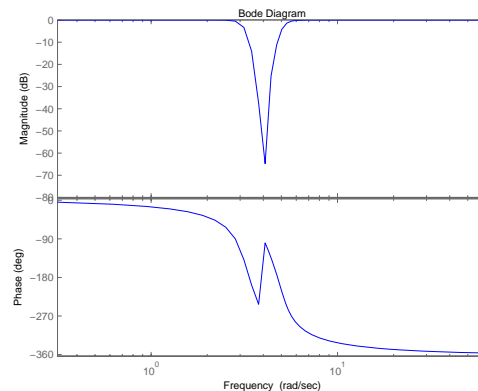


圖 4. 3 階數巴特渥斯帶止濾波器的類比頻率與振幅及相位之關係

例題 2. 應用脈衝非變異法及雙線性轉換法將類比巴特渥斯低通濾波器轉為高通數位濾波器。濾波器規格為

$$\omega_{pL} = 0.2\pi, \omega_{pH} = 0.2\pi, R_p = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi, A_s = 15\text{dB}$$

ω_{pL} : 低通數位帶通頻率 ω_{pH} : 高通數位帶頻率

R_p : 帶通連波 ω_s : 數位帶止頻率 A_s : 帶止衰減

本文經由以上理論分析，首先建立一模擬系統藉由拉普拉斯轉換法將其展開為部份分式，並可利用 MATLAB 軟體選定其時間區間進行分析計算並將結果以圖形繪出如圖 5。應用脈衝非變異法及雙線性轉換法將類比巴特沃斯低通濾波器轉為高通數位濾波器。

4. 結果與討論

本文經由以上理論分析，首先經由類比頻率轉換，從正規化的古典類比低通濾波器函數 $H_a(s)$ 開始，預先扭曲截止頻率，然後應用方程式雙線性轉換，產生數位等效濾波器 $H(z)$ 。進行有關之類比頻率轉換，設計具徑度截止頻率於 Ω_0 的低通巴特沃斯濾波器，是從正規化巴特沃斯低通濾波器開始，並用 s/Ω_0 置換 s 。使用同樣方法，可以將正規化低通濾波器，轉換到其他型態的頻率選擇性濾波器，如高通、帶通，和帶止濾波器。本文之計算模擬係採用 MATLAB 軟體之相關功能進行分析，並將各種轉換結果以圖形繪出，如圖 1, 2, 3, 4。

最後則是進行離散化處理，藉由(a)脈衝不變轉換法(b)雙線性轉換法等兩種轉換方式，可將拉普拉斯方程式轉換為使 Z-轉換的離散系統並可利用 MATLAB 軟體選定其時間區間進行分析計算並將結果以圖形繪出如圖 5，由此兩種數位訊號轉換後之圖形比較其結果均十分進近似。由本文之計算模擬係採用 MATLAB 軟體之相關功能進行分析並將結果以圖形繪出，並得到良好的模擬結果。發現圖 5 之 3 高通數位濾波器之振幅大小經由 Bilinear 轉換較 Impulse Invariance 產生較高之振幅，此一結果為本篇論文與其它相關論文之最大不同處，尤其發現圖 5 中高通數位濾波器之振幅大小經由 Bilinear 轉換較 Impulse Invariance 產生較高之振幅其性能較佳，高出約 25%。

5. 結論

- (1) 本文模擬巴特沃斯濾波器系統，藉建立模擬類比訊號與其數位訊號方程式，利用 MATLAB 分析計算求出的不同階數之脈衝響應情況，而發現階數愈高者其轉折較明確。
- (2) 進行離散化處理並得到數位濾波器系統，藉由(1)脈衝不變轉換法(2)雙線性轉換法等兩種轉換方式，可將拉普拉斯方程式轉換為使用 Z-轉換的離散數位系統，並可利用 MATLAB 軟體選定其時間區間進行分析計算並得到良好的模擬結果，並得到雙線性轉換法比脈衝不變轉換法有更佳之轉換效果。

6. 參考文獻:

- [1] Hong-Guang Ma, Xiao-Fei Zhu, Jian-Feng Xu and Ming-Shun Ai, Circuit state analysis using chaotic signal excitation, Journal of the Franklin Institute, In Press, Corrected Proof, Available online 5 July 2007
- [2] Eduardo Romero, Gabriela Peretti, Gloria Huertas and Diego Vázquez, Test of switched-capacitor ladder filters using OBT, Microelectronics Journal, Volume 36, Issue 12, December 2005, Pages 1073-1079
- [3] D. Gordon E. Robertson and James J. Dowling, Design and responses of Butterworth and critically damped digital filters, Journal of Electromyography and Kinesiology, Volume 13, Issue 6, December 2003, Pages 569-573
- [4] G. Alarcon, C. N. Guy and C. D. Binnie, A simple algorithm for a digital three-pole Butterworth filter of arbitrary cut-off frequency: application to digital electroencephalography, Journal of Neuroscience Methods, Volume 104, Issue 1, 15 December 2000, Pages 35-44
- [5] 訊號與系統, 洪維堯等譯, 全華圖書公司
- [6] MATLAB 7 在工程上的應用, 王晉中等譯, 高立圖書公司

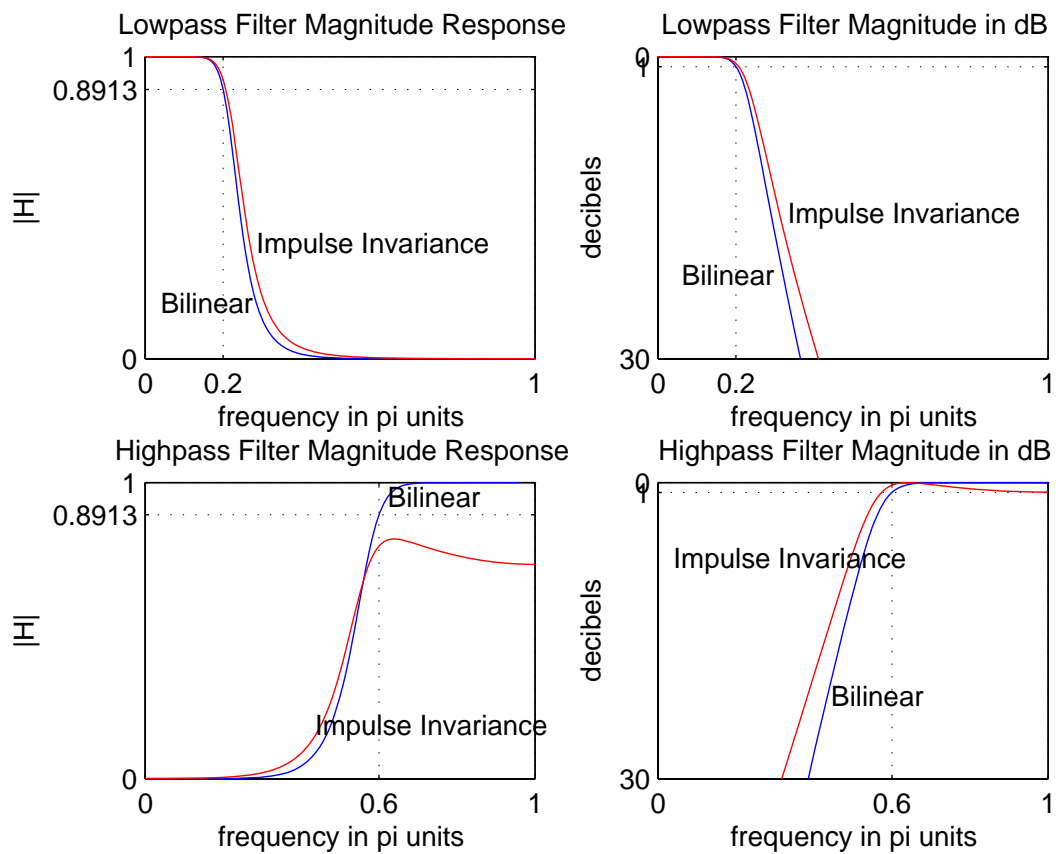


圖 5 利用脈衝非變異法及雙線性轉換法將低通巴特渥斯濾波器轉為高通濾波器的頻率與振幅之關係