Maple 的應用－以求解二重瑕積分問題為例子

余啟輝

南榮技術學院通識教育中心助理教授

e-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

摘要

本篇文章是以數學軟體 Maple 做為輔助工具來研究幾種二重瑕積分的求解問題。我們利用高等微積分中三個重要的方法：參數微分法、逐項微分法和逐項積分法，可以求出這幾種二重瑕積分的無窮級數表示法。我們的研究方式是先經過手算的過程把答案求出來，然後利用 Maple 驗證我們的結果。這樣的研究方式不僅讓我們發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為我們可以從手算和 Maple 計算兩者答案的一致性驗證我們理論的正確性。所以 Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法。

關鍵詞：二重瑕積分、參數微分法、逐項微分法、逐項積分法、Maple。

Abstract

This article takes the mathematical software Maple as the auxiliary tool to study the evaluation of some types of double improper integrals. We can obtain the infinite series forms of these types of double improper integrals by using three important methods in advanced calculus：differentiation with respect to a parameter, differentiation term by term, and integration term by term. Our research way is to count the answers by hand, and then using Maple to verify our results. This research way can not only let us find the calculation errors but also help us to revise the original thinking and reasoning direction because we can verify the correctness of our theory from the consistency of hand count and Maple calculations. Therefore, Maple can bring us inspiration and guide us to find the problem-solving method.

Keywords: double improper integrals, differentiation with respect to a parameter, differentiation term by term, integration term by term, Maple.

1. 前言

隨著資訊科技的日新月異，我們不禁要問電腦能不能像人腦一樣可以從事一些抽象的工作？例如畫出像畢卡索一樣偉大的抽象畫，或是寫出像莫札特一樣美妙的音樂作品，顯然這些對目前的電腦科技來說還是非常遙不可及的夢想。同樣對於抽象的數學理論，電腦是不是也能像數學家一樣解決一些既抽象又困難的數學問題？這當然也是一個難以實現的理想，不過我們退而求其次，看看數學軟體可以幫助我們做什麼事情？本篇文章就是介紹如何利用數學軟體 Maple 從事一些數學的研究，我們選擇 Maple 的主要理由是因為它的指令簡單而且容易學習，即使是初學者也能在短時間內就上手，因此可以讓從事數學和科學研究的人省去許多學習電腦程式語言的時間，將大量的精神投入問題的研究上，這正是 Maple 比其他軟體優越的地方。另一方面利用 Maple 強大的計算功能，使我們面對困難的問題比較容易迎刃而解，即使 Maple 解不出答案，但是我們還是可以從 Maple 計算出的近似值或相似問題的解法看出一些蛛絲馬跡，進而推敲出解決問題的方法，這就是 Maple 在科學研究上可以啟發我們靈感的原因。想要對 Maple 更進一步的認識，可以經由 Maple 所提供的線上求助系統來查詢，或者前往 Maple 的網站 www.maplesoft.com 參觀瀏覽，相信會有許多意想不到的收穫;至於 Maple 的一些指令和使用方法的說明，可以參考[11], [12], [15], [17], [19], [21], [23]。

在微積分課程裡求曲面的面積、曲面底下的體積以及薄板的質心位置等問題都需要利用到二重積分(double integrals)，所以無論是二重積分的求解或數值計算都有其重要性，關於這方面的介紹可以參考[13,§48], [14,第三章], [18, chap. 16], [20, chap. 14], [22, chap. 14]以及[25, chap. 6]。本篇論文主要是研究

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^m (\ln y)^n x^a y^b \ln(1+x^c y^d)\,dxdy \tag{1}$$

以及

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^m (\ln y)^n x^a y^b \tan^{-1}(x^c y^d)dxdy \tag{2}$$

這兩種二重瑕積分(double improper integrals)的求解問題，其中$a,b,c,d>0$且m,n為非負整數。我們利用高等微積分中三個重要的方法：參數微分法(differentiation with respect to a parameter)、逐項微分法(differentiation term by term)和逐項積分法(integration term by term)可以得到這兩種二重瑕積分的無窮級數表示法(infinite series forms)，也就是本文兩個主要的結果：定理 1、定理 2。並且我們由定理 1 和定理 2 分別得到推論 1 和推論 2。另一方面，我們舉出四個二重瑕積分的例子實際的來做計算，我們採取的研究方式是先經過手算的過程把答案求出來，然後利用 Maple 驗證我們的結果。這種方式不僅讓我們隨時發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為從我們手算得到的結果和經由 Maple 計算兩者答案的一致性可以驗證我們理論的正確性，所以說 Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法，這句話一點也不為過。另一方面，有關 Maple 在多重積分問題上的應用可以參考[1]-[10]。

2. 主要的理論

以下我們先介紹本文用到的公式：

公式：

(i) 設u為實數且$-1<u\le 1$，則

$$\ln(1+u)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}u^k \tag{3}$$

(ii) 設 u 為實數且 $-1\le u\le 1$，則

$$\tan^{-1}u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}u^{2k-1} \tag{4}$$

其次介紹本文用到的三個重要定理：

參數微分法 ([16, p283])：假設I_1,I_2皆為實數區間，若兩變數函數 $f(x,y)$ 以及它對 y 的一階偏微分 $f_y(x,y)$ 定義在 $I_1\times I_2$ 且滿足以下條件 :(i) 對所有 $y\in I_2$，Lebesgue 積分 $\int_{I_1} f(x,y)dx$ 和 $\int_{I_1} f_y(x,y)dx$ 都存在，(ii)存在一個在區間 I_1 的 Lebesgue 可積分函數 $G(x)$ 使得 $|f_y(x,y)|\le G(x)$ 對所有 $(x,y)\in I_1\times I_2$。則 $F(y)=\int_{I_1} f(x,y)dx$ 在區間 I_2 可微分且其微分 $\frac{d}{dy}F(y)=\int_{I_1} f_y(x,y)dx$。

逐項微分法 ([24, p193, Theorem 7.14(iii)])：如果對所有非負整數k，函數$g_k:(a,b)\to R$滿足下列三個條件：(i)存在一點 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，(iii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂(uniformly convergent)。則 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)$ 在開區間(a,b)上均勻收斂而且可以微分，它的微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$。

逐項積分法 ([24, p192, Theorem 7.14(ii)])：假設$\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$為在閉區間$[r,s]$上的 Riemann 可積分函數序列使得 $\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)$ 均勻收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)$ 在 $[r,s]$ 上可積分，且其積分 $\int_r^s\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_r^s g_n(x)dx$。

接著推導本文兩個主要的定理：

定理 1：設$a,b,c,d>0$且m,n為非負整數。則

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^m (\ln y)^n x^a y^b \ln(1+x^c y^d)dxdy$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}m!n!(-1)^{k+1}}{k(ck+a+1)^{m+1}(dk+b+1)^{n+1}} \tag{5}$$

證明：因為二重積分

$$\int_0^1\int_0^1 x^a y^b \ln(1+x^c y^d)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 x^a y^b \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(x^c y^d)^k dxdy$$

(利用公式(i)))

$$=\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{ck+a}y^{dk+b}dxdy$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int_0^1\int_0^1 x^{ck+a}y^{dk+b}dxdy$$

(利用逐項積分法)

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\int_0^1 x^{ck+a}dx\right)\left(\int_0^1 y^{dk+b}dy\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(ck+a+1)(dk+b+1)} \quad (6)$$

利用參數微分法和逐項微分法，(6)式等號兩邊同時對a做m次微分以及對b做n次微分，我們得到二重瑕積分

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^m(\ln y)^n x^a y^b \ln(1+x^c y^d)dxdy$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}m!n!(-1)^{k+1}}{k(ck+a+1)^{m+1}(dk+b+1)^{n+1}} \qquad \blacksquare$$

在定理 1 中令$x=e^{-s}, y=e^{-t}$，我們很容易得到以下的推論：

推論 1: 和定理 1 相同的假設，則二重瑕積分

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^m t^n e^{-(a+1)s-(b+1)t}\ln(1+e^{-cs-dt})dsdt$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m!n!(-1)^{k+1}}{k(ck+a+1)^{m+1}(dk+b+1)^{n+1}} \quad (7)$$

定理 2: 和定理 1 相同的假設，則二重瑕積分

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^m(\ln y)^n x^a y^b \tan^{-1}(x^c y^d)dxdy=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}m!n!(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2ck+a-c+1)^{m+1}(2dk+b-d+1)^{n+1}} \quad (8)$$

證明：因為二重積分

$$\int_0^1\int_0^1 x^a y^b \tan^{-1}(x^c y^d)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 x^a y^b \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}(x^c y^d)^{2k-1}dxdy$$

(利用公式(ii))

$$=\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}x^{2ck+a-c}y^{2dk+b-d}dxdy$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\int_0^1\int_0^1 x^{2ck+a-c}y^{2dk+b-d}dxdy$$

(利用逐項積分法)

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\left(\int_0^1 x^{2ck+a-c}dx\right)\left(\int_0^1 y^{2dk+b-d}dy\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2ck+a-c+1)(2dk+b-d+1)} \quad (9)$$

利用參數微分法和逐項微分法，(9)式等號兩邊同時對a做m次微分以及對b做n次微分，我們得到二重瑕積分

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^m(\ln y)^n x^a y^b \tan^{-1}(x^c y^d)dxdy$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}m!n!(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2ck+a-c+1)^{m+1}(2dk+b-d+1)^{n+1}} \qquad \blacksquare$$

在定理 2 中令$x=e^{-s}, y=e^{-t}$，我們可以得到下面的推論：

推論 2: 和定理 1 相同的假設，則二重瑕積分

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^m t^n e^{-(a+1)s-(b+1)t}\tan^{-1}(e^{-cs-dt})dsdt=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m!n!(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2ck+a-c+1)^{m+1}(2dk+b-d+1)^{n+1}} \quad (10)$$

3. 例子說明

接著針對本文所探討的二重瑕積分問題，舉出四個例子實際的利用定理 1、推論 1、定理 2 和推論 2 求出這些二重瑕積分的無窮級數表示法。同時我們利用 Maple 計算出這些二重瑕積分以及它們無窮級數表示法的近似值

來檢驗我們的答案。

例題 1: 利用定理 1 可以求出二重瑕積分

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^2(\ln y)^4 x^3 y^5 \ln(1+x^6y^3)dxdy$$

$$= 48\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(6k+4)^3(3k+6)^5} \qquad (11)$$

以下利用 Maple 計算出兩者的近似值來驗證我們的答案:

>evalf(Doubleint((ln(x))^2*(ln(y))^4*x^3*y^5*ln(1+x^6*y^3),x=0..1,y=0..1),14);

$$7.9107392573158\cdot 10^{-7}$$

>evalf(48*sum((-1)^(k+1)/(k*(6*k+4)^3*(3*k+6)^5),k=1..infinity),22);

$$7.910739257315723000\ 10^{-7} + 0.\ \mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中出現了虛數 I ($=\sqrt{-1}$),是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的緣故,但因為虛數部分為 0,所以是可以忽略的。

例題 2: 利用推論 1 可以求出二重瑕積分

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} st^2e^{-2s-3t}\ln(1+e^{-4s-5t})dsdt$$

$$= 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(4k+2)^2(5k+3)^3} \qquad (12)$$

接著利用 Maple 計算出兩者的近似值來驗證我們的答案:

>evalf(Doubleint(s*t^2*exp(-2*s-3*t)*ln(1+exp(-4*s-5*t)),s=0..infinity,t=0..infinity),14);

0.00010443956913158

>evalf(2*sum((-1)^(k+1)/(k*(4*k+2)^2*(5*k+3)^3),k=1..infinity),22);

$$0.0001044395691315848780 + 0.\ \mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中虛數部分為 0,所以是可以忽略的。

例題 3: 利用定理 2 可以求出二重瑕積分

$$\int_0^1\int_0^1 (\ln x)^3(\ln y)^2 x^{1/4}y^{7/5}\tan^{-1}(x^{1/6}y^{3/2})dxdy$$

$$=-12\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\left(\frac{1}{3}k+\frac{13}{12}\right)^4\left(3k+\frac{9}{10}\right)^3} \qquad (13)$$

同樣利用 Maple 計算出兩者的近似值來檢驗答案:

>evalf(Doubleint((ln(x))^3*(ln(y))^2*x^(1/4)*y^(7/5)*arctan(x^(1/6)*y^(3/2)),x=0..1,y=0..1),14);

$$-0.049038734551372$$

>evalf(-12*sum((-1)^(k+1)/((2*k-1)*(k/3+13/12)^4*(3*k+9/10)^3),k=1..infinity),20);

$$-0.049038734551371591 9 - 1\cdot 10^{-19}\ \mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中虛數部分很小,因此是可以忽略的。

例題 4: 利用推論 2 可以得到二重瑕積分

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^5t^3e^{-2s-4t}\tan^{-1}(e^{-s-3t})dsdt$$

$$= 720\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)^6(6k+1)^4} \qquad (14)$$

同樣利用 Maple 計算出兩者的近似值:

>evalf(Doubleint(s^5*t^3*exp(-2*s-4*t)*arctan(exp(-s-3*t)),s=0..infinity,t=0..infinity),14);

0.00041082238048018

>evalf(720*sum((-1)^(k+1)/((2*k-1)*(2*k+1)^6*(6*k+1)^4),k=1..infinity),22);

$$0.0004108223804801690 + 0.\ \mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中虛數部分為 0,所以是可以忽略的。

4. 結論

由上面四個例子可以知道本文的定理 1、推論 1、定理 2 和推論 2 是求解我們所探討的二重瑕積分問題的主要理論依據,並且我們看到參數微分法、逐項微分法和逐項積分法在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上這三個定理的應用十分廣泛,許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解,我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面,也可以看出 Maple 在輔助解題上扮演著重要的角色,我們甚至可以利用 Maple 來設計一些二重瑕積分問題,並且試著從中找到解決問題的關鍵。將來我們會將觸角延伸到其他微積分和高等微積分的問

題上，同時利用 Maple 發展出新的方法來解決這些問題。我們將以此做為 Maple 在研究和教學上的良好教材，來豐富微積分和高等微積分的內涵。

5. 誌謝

感謝審稿委員對本篇論文所提出的寶貴建議，我們已經盡最大的努力來修正。至於(9)式等號兩邊同時對 a 做 m 次微分以及對 b 做 n 次微分，個人認為不需要針對 $a=1, a>1$ 與 $b=1, b>1$ 分開來討論。

參考文獻

[1]余啟輝，“Maple 在求解二重瑕積分上的應用”，**2012 創新教育暨電腦與網路科技在教育上的應用國際研討會**，國立新竹教育大學，2012。

[2]余啟輝，“Maple 在求解某種多重積分上的應用”，**第十八屆資訊管理暨實務研討會**，TP20120128，國立臺北科技大學，2012。

[3]余啟輝，“兩種多重瑕積分的求解問題”，**2012 彰雲嘉大學校院聯盟學術研討會**，M-7，大葉大學，2012。

[4]余啟輝，“Maple 的應用－以多重積分的求解問題為例子”，**第六屆海峽兩岸科技與人文教育暨產學合作研討會**，EMD001，國立勤益科技大學，2012。

[5]余啟輝，“Maple 的應用－以求解二重積分為例子”，**2012 兩岸機電暨產學合作學術研討會**，O06，大華科技大學，2012。

[6]余啟輝，“Maple 的應用－以兩種二重積分的求解問題為例子”，**SAE2012 中華民國第十七屆車輛工程學術研討會**，856-860 頁，南開科技大學，2012。

[7]余啟輝，“Maple 在多重瑕積分問題上的應用”，**2012 光電與通訊工程研討會**，275-280 頁，國立高雄應用科技大學，2012。

[8]余啟輝，“Maple 的應用－以二重積分的無窮級數表示法為例子”，**UHC2012 第六屆優質家庭生活科技關鍵技術研討會**，211-214 頁，崑山科技大學，2012。

[9]余啟輝，“多重瑕積分的求解問題”，**國立屏東科技大學 101 學年度通識教育學術研討會**，1-7 頁，國立屏東科技大學，2012。

[10]余啟輝，“Maple 的應用—以 Fourier 級數求解二重積分為例子”，**2012 ISC 第六屆智慧型系統工程應用研討會**，H2-6，遠東科技大學，2012。

[11]洪維恩，***Maple 在微積分之應用－基礎篇***，五南圖書出版公司，2000。

[12]洪維恩，***數學魔法師 Maple 6***，第二版，碁峰資訊公司，2001。

[13]高木貞治 (原著)，葉能哲、賴漢卿 (合譯)，***高等微積分(解析概論)***，文笙書局，1984。

[14]賴漢卿，***應用數學(高等微積分、工程數學)***，文笙書局，1979。

[15]Abell, M. L. and Braselton, J. P., ***Maple by Example***, 3rd ed., Elsevier Academic Press, 2005.

[16]Apostol, T. M. ***Mathematical Analysis***, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1975.

[17]Corless, R. M., ***Essential Maple***, Springer-Verlag, 1994.

[18]Edwards, C. H. Jr. and Penney, D. E., ***Calculus and Analytic Geometry***, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc, 1986.

[19]Garvan, F., ***The Maple Book***, Chapman & Hall/CRC, 2001.

[20]Grossman, S. I., ***Calculus***, 5th ed., Saunders College Publishing, 1992.

[21]Heck, A., ***Introduction to Maple***, 3rd ed., Springer-Verlag, 2003.

[22]Larson, R., Hostetler, R. P., and Edwards, B. H., ***Calculus with Analytic Geometry***, 8th ed., Houghton Mifflin, 2006.

[23]Richards, D., ***Advanced Mathematical Methods with Maple***, Cambridge University Press, 2002.

[24]Wade, W. R., ***An Introduction to Analysis***, 3rd ed., Prentice Hall, 2004.

[25]Widder, D. V., ***Advanced Calculus***, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc, 1961.