Maple 在四種兩變數函數偏微分問題上的應用

余啟輝

南榮技術學院通識教育中心助理教授
e-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

摘要

本篇論文是利用數學軟體 Maple 做為輔助工具來研究四種兩變數函數的偏微分問題。我們利用逐項微分定理可以求出這四種兩變數函數的任意階偏導函數，因此大大降低了求解它們高階偏微分值的困難度。我們的研究方式是先經過手算的過程把答案求出來，然後利用 Maple 驗證我們的結果。這樣的研究方式不僅讓我們發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為我們可以從手算和 Maple 計算兩者答案的一致性驗證我們理論的正確性。因此，Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法。

關鍵詞：兩變數函數、偏導函數、高階偏微分值、逐項微分定理、Maple。

Abstract

This paper uses the mathematical software Maple for the auxiliary tool to study the partial differential problem of four types of two-variables functions. We can obtain any order partial derivatives of these four types of two -variables functions by using differentiation term by term theorem, and hence reducing the difficulty of evaluating their higher order partial derivative values greatly. Our research way is to count the answers by hand, and then using Maple to verify our results. This research way can not only let us find the calculation errors but also help us to revise the original thinking and reasoning direction because we can verify the correctness of our theory from the consistency of hand count and Maple calculations. Therefore, Maple can bring us inspiration and guide us to find the problem-solving method.

Keywords: two-variables functions, partial derivatives, higher order partial derivative values, differentiation term by term theorem, Maple.

1. 前言

電腦代數系統(Computer Algebra System，簡稱 CAS)已經廣泛應用在數學和科學的研究上，藉由電腦的快速運算與美麗親和的圖形介面，讓數學和科學的研究增加了無限的想像力。而數學軟體 Maple 可以說是 CAS 領域裡的翹楚，它在數學運算系統中佔有舉足輕重的地位。Maple 這套軟體的優越性在於它的指令簡單而且容易學習，可以讓從事數學和科學研究的人省去許多學習電腦程式語言的時間，將大部分的精神投入問題的研究上。另一方面，透過 Maple 的數值和符號運算，將思考邏輯轉換成一系列的指令，經由 Maple 的運算結果來修正先前推論和思考的方向，形成一種反饋。因為這種反饋是直接而具建設性的，因此可以增進我們對問題的了解以及培養研究的興趣。想要對 Maple 更進一步的認識，可以經由 Maple 所提供的線上求助系統來查詢，或者前往 Maple 的網站 www.maplesoft.com 參觀瀏覽，相信會有許多意想不到的收穫;至於 Maple 的一些指令和使用方法的說明，可以參考[6], [7], [9], [12], [15], [18], [21]。

在微積分和工程數學的課程裡有關多變數函數偏微分問題(partial differential problem)的研究是一項重要的課題，例如 Laplace 方程式、波動方程式(wave equation)以及其他一些重要的物理方程式都牽涉到多變數函數的偏微分，所以無論在物理、工程或其他自然科學領域裡，有關多變數函數偏微分的求解或數值計算都有其重要性，這方面的書籍和論文可以參考[8], [11], [13], [14], [16], [17], [19], [20], [22], [23]。本篇文章主要是研究四種兩變數函數的偏微分問題，它們分別是

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}\times\cos[y^a\sin(bx+c)] \tag{1}$$

$$g(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}\times\sin[y^a\sin(bx+c)]$$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[\,y^a\cos(bx+c)]+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}\times\cos[\,y^a\sin(bx+c)] \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

以及

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[\,y^a\cos(bx+c)]-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}\times\sin[\,y^a\sin(bx+c)] \tag{4}$$

，其中 a,b,c 為實數。我們利用逐項微分定理(differentiation term by term theorem)可以求出這四種兩變數函數的任意階偏導函數，也就是本文四個主要的結果：定理 1, 2, 3, 4，因此大大降低了求解這些函數高階偏微分值(higher order partial derivative values)的困難度。另一方面，我們舉出四個兩變數函數的例子，分別利用本文四個主要的定理實際的求出這些兩變數函數的任意階偏導函數以及一些它們的高階偏微分值，而這些高階偏微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時我們利用 Maple 計算出這些高階偏微分值以及它們無窮級數表示法的近似值來驗證我們的理論。我們採取的研究方式是先經過手算的過程把答案求出來，然後利用 Maple 驗證我們的結果。這種方式不僅讓我們隨時發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為從我們手算得到的結果和經由 Maple 計算兩者答案的一致性可以驗證我們理論的正確性，所以說 Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法，這句話一點也不為過。另一方面，有關 Maple 在多變數函數偏微分問題上的應用可以參考[1]-[5]。

2. 主要的結果

首先我們介紹本文用到的符號和公式：

符號：

(i) 設 t 為實數且 q 為正整數，定義 $(t)_q=t(t-1)\cdots(t-q+1)$；而 $(t)_0=1$。

(ii) 設複數 $z=a+ib$，其中 a,b 為實數，$i=\sqrt{-1}$。我們將 z 的實部 a 記作 $\mathrm{Re}(z)$，虛部 b 記作 $\mathrm{Im}(z)$。

(iii) 設 n,m 為非負整數，兩變數函數 $f(x,y)$ 先對 x 做 m 次偏微分再對 y 做 n 次偏微分的 $n+m$ 階偏導函數記做 $\dfrac{\partial^{n+m}f}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$。

公式：

(i)尤拉公式（Euler' s formula)：設 x 為實數，$e^{ix}=\cos x+i\sin x$。

(ii)設 z 為任意複數，則複數雙曲正弦函數 $\sinh z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1}$。

(iii)設 z 為任意複數，則複數雙曲餘弦函數 $\cosh z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{2k}$。

其次介紹本文用到的一個重要定理：

逐項微分定理 ([10])：如果對所有非負整數 k，函數 $g_k:(a,b)\to R$ 滿足下列三個條件：(i) 存在一點 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x_0)$ 收斂，(ii) 所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，(iii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂(uniformly convergent)。則 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 上均勻收斂而且可以微分，它的微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$。

接著推導本文四個主要的定理：

定理 1：設 a,b,c 為實數且 m,n 為非負整數。若兩變數函數

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[\,y^a\cos(bx+c)]-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}\times\cos[\,y^a\sin(bx+c)]$$

的定義域為 $\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,y^a\text{存在且}\,y\neq 0\right\}$，則 $f(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}f}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k+1)^m(2ak+a)_n}{(2k+1)!}y^{a(2k+1)-n}\times$$

$$\cos[(2k+1)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}] \quad (5)$$

證明：因為

$f(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}$$

$$\times\cos[y^a\sin(bx+c)]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[y^a\cos(bx+c)](\cos[y^a\sin(bx+c)]$$

$$+i\sin[y^a\sin(bx+c)])-\exp[-y^a\cos(bx+c)]$$

$$\cdot(\cos[y^a\sin(bx+c)]-i\sin[y^a\sin(bx+c)])\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]\exp i[y^a\sin(bx+c)]$$

$$-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\exp -i[y^a\sin(bx+c)]\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[y^a\exp i(bx+c)]-$$

$\exp[-y^a\exp i(bx+c)]\}$ (利用尤拉公式)

$$=\mathrm{Re}\{\sinh[y^a\exp i(bx+c)]\}$$

$$=\mathrm{Re}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}y^{a(2k+1)}\exp i(2k+1)(bx+c)\}$$

(利用公式(ii))

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}y^{2ak+a}\cos[(2k+1)(bx+c)] \quad (6)$$

利用逐項微分定理，(6)式等號兩邊先對 x 做 m 次偏微分再對 y 做 n 次偏微分，我們得到 $f(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}f}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k+1)^m(2ak+a)_n}{(2k+1)!}y^{a(2k+1)-n}\times$$

$$\cos[(2k+1)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}] \quad ■$$

定理 2：和定理 1 相同的假設。若兩變數函數 $g(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}$$

$$\times\sin[y^a\sin(bx+c)]$$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \mid y^a$ 存在且 $y\neq 0\}$，則 $g(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}g}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k+1)^m(2ak+a)_n}{(2k+1)!}y^{a(2k+1)-n}\times$$

$$\sin[(2k+1)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}] \quad (7)$$

證明：和定理 1 相同的證明方式，因為

$g(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]\exp i[y^a\sin(bx+c)]$$

$$-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\exp -i[y^a\sin(bx+c)]\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\exp[y^a\exp i(bx+c)]-$$

$\exp[-y^a\exp i(bx+c)]\}$ (利用尤拉公式)

$$=\mathrm{Im}\{\sinh[y^a\exp i(bx+c)]\}$$

$$=\mathrm{Im}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}y^{a(2k+1)}\exp i(2k+1)(bx+c)\}$$

(利用公式(ii))

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}y^{2ak+a}\sin[(2k+1)(bx+c)] \quad (8)$$

利用逐項微分定理，(8)式等號兩邊先對 x 做 m 次偏微分再對 y 做 n 次偏微分，我們得到 $g(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}g}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k+1)^m(2ak+a)_n}{(2k+1)!}y^{a(2k+1)-n}\times$$

$$\sin[(2k+1)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}] \quad ■$$

定理 3：和定理 1 相同的假設。若兩變數函數 $h(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}$$

$\times\cos[y^a\sin(bx+c)]$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \mid y^a$ 存在且 $y\neq 0\}$，則 $h(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}h}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k)^m(2ak)_n}{(2k)!}y^{2ak-n}\times$$

$$\cos[(2k)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}] \qquad (9)$$

證明：因為

$h(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}$$

$$\times\cos[y^a\sin(bx+c)]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[y^a\cos(bx+c)](\cos[y^a\sin(bx+c)]$$

$$+i\sin[y^a\sin(bx+c)])+\exp[-y^a\cos(bx+c)]$$

$$\cdot(\cos[y^a\sin(bx+c)]-i\sin[y^a\sin(bx+c)])\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]\exp i[y^a\sin(bx+c)]$$

$$+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\exp-i[y^a\sin(bx+c)]\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[y^a\exp i(bx+c)]+$$

$$\exp[-y^a\exp i(bx+c)]\}$$ (利用尤拉公式)

$$=\mathrm{Re}\{\cosh[y^a\exp i(bx+c)]\}$$

$$=\mathrm{Re}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}y^{a(2k)}\exp i(2k)(bx+c)\}$$

(利用公式(iii))

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}y^{2ak}\cos[(2k)(bx+c)] \qquad (10)$$

利用逐項微分定理，(10)式等號兩邊先對 x 做 m 次偏微分再對 y 做 n 次偏微分，我們得到 $h(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}h}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k)^m(2ak)_n}{(2k)!}y^{2ak-n}\times$$

$$\cos[(2k)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}]$$ ■

定理 4：和定理 1 相同的假設。若

$u(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]-\exp[-y^a\cos(bx+c)]\}$$

$$\times\sin[y^a\sin(bx+c)]$$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \mid y^a$ 存在且 $y\neq 0\}$，則 $u(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k)^m(2ak)_n}{(2k)!}y^{2ak-n}\times$$

$$\sin[(2k)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}] \qquad (11)$$

證明：和定理 3 相同的證明方式，因為

$u(x,y)$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\exp[y^a\cos(bx+c)](\cos[y^a\sin(bx+c)]$$

$$+i\sin[y^a\sin(bx+c)])+\exp[-y^a\cos(bx+c)]$$

$$\cdot(\cos[y^a\sin(bx+c)]-i\sin[y^a\sin(bx+c)])\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\exp[y^a\cos(bx+c)]\exp i[y^a\sin(bx+c)]$$

$$+\exp[-y^a\cos(bx+c)]\exp-i[y^a\sin(bx+c)]\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\exp[y^a\exp i(bx+c)]+$$

$$\exp[-y^a\exp i(bx+c)]\}$$ (利用尤拉公式)

$$=\mathrm{Im}\{\cosh[y^a\exp i(bx+c)]\}$$

$$=\mathrm{Im}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}y^{a(2k)}\exp i(2k)(bx+c)\}$$

(利用公式(iii))

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}y^{2ak}\sin[(2k)(bx+c)] \qquad (12)$$

利用逐項微分定理，(12)式等號兩邊先對 x 做 m 次偏微分再對 y 做 n 次偏微分，我們得到

$u(x,y)$ 的 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^m(2k)^m(2ak)_n}{(2k)!}y^{2ak-n}\times$$

$$\sin[(2k)(bx+c)+\frac{m\pi}{2}]$$ ■

3. 例子說明

接著針對本文所探討的四種兩變數函數的偏微分問題，舉出四個例子實際的利用本文四個主要的定理求出這些兩變數函數的任意階偏導函數以及一些它們的高階偏微分值，而這些高階偏微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時我們利用 Maple 計算出這些高階偏微分值以及它們無窮級數表示法的近似值來印證我們的理論。

例題 1: 設兩變數函數

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[y^3\cos(2x-4)]-$$
$$\exp[-y^3\cos(2x-4)]\}\times\cos[y^3\sin(2x-4)] \tag{13}$$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \big| y\neq 0\}$，由定理 1 得到 $f(x,y)$ 的任意 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}f}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^m(2k+1)^m(6k+3)_n}{(2k+1)!}y^{6k+3-n}\times$$
$$\cos[(2k+1)(2x-4)+\frac{m\pi}{2}] \tag{14}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(3,2)$ 的 10 階偏微分值

$$\frac{\partial^{10}f}{\partial y^6\partial x^4}(3,2)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^4(2k+1)^4(6k+3)_6}{(2k+1)!}2^{6k-3}\times$$
$$\cos(4k+2) \tag{15}$$

以下利用 Maple 計算出 $\frac{\partial^{10}f}{\partial y^6\partial x^4}(3,2)$ 以及它的無窮級數解的近似值來驗證我們的答案:

```
>f:=(x,y)->1/2*(exp(y^3*cos(2*x-4))-exp(-y^3
*cos(2*x-4)))*cos(y^3*sin(2*x-4));
```

$$f:=(x,y)\to\left(\frac{1}{2}e^{y^3\cos(2x-4)}-\frac{1}{2}e^{-y^3\cos(2x-4)}\right)$$
$$\cos(y^3\sin(2x-4))$$

```
>evalf(D[1$4,2$6](f)(3,2),14);
```

$$2.9594703698226\cdot 10^{13}$$

```
>evalf(2^4*sum((2*k+1)^4*product(6*k+3-i,i=0
..5)/(2*k+1)!*2^(6*k-3)*cos(4*k+2),k=0..infinity
),14);
```

$$2.9594703698225\cdot 10^{13}$$

例題 2: 設兩變數函數

$$g(x,y)=\frac{1}{2}\{\exp[y^2\cos(5x+2)]$$
$$+\exp[-y^2\cos(5x+2)]\}\times\sin[y^2\sin(5x+2)] \tag{16}$$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \big| y\neq 0\}$，由定理 2 得到 $g(x,y)$ 的任意 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}g}{\partial y^n\partial x^m}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^m(2k+1)^m(4k+2)_n}{(2k+1)!}y^{4k+2-n}\times$$
$$\sin[(2k+1)(5x+2)+\frac{m\pi}{2}] \tag{17}$$

所以 $g(x,y)$ 在 $(-1,2)$ 的 13 階偏微分值

$$\frac{\partial^{13}g}{\partial y^9\partial x^4}(-1,2)$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^4(2k+1)^4(4k+2)_9}{(2k+1)!}2^{4k-7}\times$$
$$\sin(6k+3) \tag{18}$$

以下利用 Maple 計算出 $\frac{\partial^{13}g}{\partial y^9\partial x^4}(-1,2)$ 以及它的無窮級數解的近似值來印證我們的結果:

```
>g:=(x,y)->1/2*(exp(y^2*cos(5*x+2))+exp(-y^2
```

*cos(5*x+2)))*sin(y^2*sin(5*x+2));

$$g := (x,y) \to \left(\frac{1}{2}\,e^{y^2\cos(5x+2)} + \frac{1}{2}\,e^{-y^2\cos(5x+2)}\right)$$
$$\sin\left(y^2\sin(5x+2)\right)$$

>evalf(D[1$4,2$9](g)(-1,2),14);

$$-1.1497386503714 \cdot 10^{15}$$

>evalf(-5^4*sum((2*k+1)^4*product(4*k+2-i,i=0..8)/(2*k+1)!*2^(4*k-7)*sin(6*k+3),k=0..infinity),14);

$$-1.1497386503713 \cdot 10^{15}$$

例題 3: 設兩變數函數

$$h(x,y) = \frac{1}{2}\{\exp[\ y\cos(\ 3x-1)] + \exp[\ -y\cos(\ 3x-1)]\} \times \cos[\ y\sin(\ 3x-1)] \tag{19}$$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \mid y \neq 0\}$，由定理 3 得到 $h(x,y)$ 的任意 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}h}{\partial y^n \partial x^m}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^m\,(2k)^m\,(2k)_n}{(2k)!} y^{2k-n} \times \cos[(2k)(3x-1)+\frac{m\pi}{2}] \tag{20}$$

所以 $h(x,y)$ 在 $(1,2)$ 的 9 階偏微分值

$$\frac{\partial^9 h}{\partial y^6 \partial x^3}(1,2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^3(2k)^3(2k)_6}{(2k)!} 2^{2k-6} \sin(\ 4k) \tag{21}$$

同樣利用 Maple 計算出 $\frac{\partial^9 h}{\partial y^6 \partial x^3}(1,2)$ 以及它的無窮級數解的近似值來檢驗我們的結果:

>h:=(x,y)->1/2*(exp(y*cos(3*x-1))+exp(-y*cos(3*x-1)))*cos(y*sin(3*x-1));

$$h := (x,y) \to \left(\frac{1}{2}\,e^{y\cos(3x-1)} + \frac{1}{2}\,e^{-y\cos(3x-1)}\right)$$
$$\cos\left(y\sin(3x-1)\right)$$

>evalf(D[1$3,2$6](h)(1,2),14);

$$1731.4933978522$$

>evalf(3^3*sum((2*k)^3*product(2*k-i,i=0..5)/(2*k)!*2^(2*k-6)*sin(4*k),k=0..infinity),14);

$$1731.4933978645 + 4.6558125000000 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中出現了虛數 I $(=\sqrt{-1})$，是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的緣故，但因為虛數部分很小，所以是可以忽略的。

例題 4: 若兩變數函數

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\{\exp[\ y^2\cos(\ 8x-6)] - \exp[-y^2\cos(8x-6)]\} \times \sin[\ y^2\sin(8x-6)] \tag{22}$$

的定義域為 $\{(x,y)\in R^2 \mid y \neq 0\}$，由定理 4 得到 $u(x,y)$ 的任意 $n+m$ 階偏導函數

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial y^n \partial x^m}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^m\,(2k)^m\,(4k)_n}{(2k)!} y^{4k-n} \times \sin[(2k)(8x-6)+\frac{m\pi}{2}] \tag{23}$$

所以 $u(x,y)$ 在 $(1,-2)$ 的 9 階偏微分值

$$\frac{\partial^9 u}{\partial y^4 \partial x^5}(1,-2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^5(2k)^5(4k)_4}{(2k)!}(-2)^{4k-4}\cos(\ 4k) \tag{24}$$

接著利用 Maple 計算出 $\frac{\partial^9 u}{\partial y^4 \partial x^5}(1,-2)$ 以及它的無窮級數解的近似值來印證我們的答案:

>u:=(x,y)->1/2*(exp(y^2*cos(8*x-6))-exp(-y^2*cos(8*x-6)))*sin(y^2*sin(8*x-6));

$$u := (x,y) \to \left(\frac{1}{2}\,e^{y^2\cos(8x-6)} - \frac{1}{2}\,e^{-y^2\cos(8x-6)}\right)$$
$$\sin\left(y^2\sin(8x-6)\right)$$

>evalf(D[1$5,2$4](u)(1,-2),14);

$$-2.1930959841232 \cdot 10^{11}$$

>evalf(8^5*sum((2*k)^5*product(4*k-i,i=0..3)/(2*k)!*(-2)^(4*k-4)*cos(4*k),k=0..infinity),14);

$$-2.1930959841236 \cdot 10^{11}$$

4. 結論

由上面四個例子可以知道本文四個主要的定理是求解我們所探討的四種兩變數函數偏微分問題的主要理論依據，並且我們看到逐項微分定理在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上這個定理的應用十分廣泛，許多困難的問題利用它都可以迎刃而解，我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，也可以看出 Maple 在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用 Maple 來設計一些多變數函數的偏微分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。將來我們會將觸角延伸到其他微積分和高等微積分的問題上，同時利用 Maple 發展出新的方法來解決這些問題。我們將以此做為 Maple 在研究和教學上的良好教材，來豐富微積分和高等微積分的內涵。

參考文獻

[1]余啟輝，"Maple 的應用－以求解兩變數函數的高階偏微分值為例子"，**第十八屆資訊管理暨實務研討會**，TP20120121，國立臺北科技大學，2012。

[2]余啟輝，"Maple 的應用－以某種多變數函數的偏微分問題為例子"，**第十八屆資訊管理暨實務研討會**，TP20120643，國立臺北科技大學，2012。

[3]余啟輝，"Maple 在高階偏微分值求解問題上的應用"，**2012 彰雲嘉大學校院聯盟學術研討會**，H-8，大葉大學，2012。

[4]余啟輝，"Maple 在偏微分問題上的應用"，**CSME 29 中國機械工程學會第二十九屆全國學術研討會**，No. 1340，國立中山大學，2012。

[5]余啟輝，"Maple 在多變數函數偏微分問題上的應用"，**2012 兩岸機電暨產學合作學術研討會**，O05，大華科技大學，2012。

[6]洪維恩，***Maple 在微積分之應用－基礎篇***，五南圖書出版公司，2000。

[7]洪維恩，***數學魔法師 Maple 6***，第二版，碁峰資訊公司，2001。

[8]賴漢卿，***應用數學(高等微積分、工程數學)***，文笙書局，第二章，1979。

[9]Abell, M. L. and Braselton, J. P., ***Maple by Example***, 3rd ed., Elsevier Academic Press, 2005.

[10]Apostol, T. M. ***Mathematical Analysis***, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., p230, 1975.

[11]Bischof, C., Corliss, G., and Griewank, A., "Structured Second and Higher-Order Derivatives Through Univariate Taylor Series," ***Optimization Methods and Software***, 2, pp. 211-232, 1993.

[12]Corless, R. M., ***Essential Maple***, Springer-Verlag, 1994.

[13]Edwards, C. H. Jr. and Penney, D. E., ***Calculus and Analytic Geometry***, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc, chap. 15, 1986.

[14]Fraenkel, L. E. , " Formulae for High Derivatives of Composite Functions," ***Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society***, 83, pp. 159-165, 1978.

[15]Garvan, F., ***The Maple Book***, Chapman & Hall/CRC, 2001.

[16]Grossman, S. I., ***Calculus***, 5th ed., Saunders College Publishing, chap. 13, 1992.

[17]Hardy, M., "Combinatorics of Partial Derivatives," ***The Electronic Journal of Combinatorics*** 13, #R1, 2006.

[18]Heck, A., ***Introduction to Maple***, 3rd ed., Springer-Verlag, 2003.

[19]Lang, S. , ***Undergraduate Analysis***, Springer-Verlag, chap. 15&16, 1983.

[20]Larson, R., Hostetler, R. P., and Edwards, B. H., ***Calculus with Analytic Geometry***, 8th ed., Houghton Mifflin, chap. 13, 2006.

[21]Richards, D., ***Advanced Mathematical Methods with Maple***, Cambridge University Press, 2002.

[22]Richard, D. N., "An Efficient Method for the Numerical Evaluation of Partial Derivatives of Arbitrary Order," ***ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)***, 18, pp. 159-173, 1992.

[23]Widder, D. V., ***Advanced Calculus***, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc, chap. 1, 1961.